Folgerungen aus dem Divergenzsatz

Die Greenschen Identitäten

Satz: Seien $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann gilt

- $\displaystyle\int_\Omega \Big[f \Delta g + \langle \nabla f \,,\, \nabla g \rangle \Big] \, d\mu = \int_{\partial\Omega} f \, \langle \nabla g \,,\, n \rangle \; do$
- $\displaystyle\int_\Omega \Big[f \Delta g - g \Delta f \Big] \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \Big[f \, \langle \nabla g \,, n \rangle - g \, \langle \nabla f \,, n \rangle \Big] \; do$

Beweis: Die erste Gleichung folgt durch Anwenden von Satz 9.8.2 auf das Vektorfeld $K = \nabla g$, denn dann ist $\nabla K = \Delta g$.
Nach der ersten Gleichung ist

$$\int_\Omega \Big[f \Delta g + \langle \nabla f \,,\, \nabla g \rangle \Big] \, d\mu = \int_{\partial\Omega} f \, D_n g \; do$$
$$\int_\Omega \Big[g \Delta f + \langle \nabla g \,,\, \nabla f \rangle \Big] \, d\mu = \int_{\partial\Omega} g \, D_n f \; do$$

Subtrahieren dieser beiden Gleichungen gibt die Behauptung.

Varianten des Divergenzsatzes

Satz: Seien f eine Funktion und K ein Vektorfeld der Klasse C^1 auf Ω. Dann gelten die Vektor–Identitäten

$$\int_{\partial\Omega} f\, n\ do = \int_\Omega \nabla f\ d\mu$$
$$\int_{\partial\Omega} (K \times n)\ do = -\int_\Omega (\nabla \times K)\ d\mu$$

Beweis: Wir bezeichnen mit e_i den i–ten Einheitsvektor. Um die erste Gleichung zu beweisen, setze

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \int_{\partial\Omega} f\, n\ do$$

Nach dem Divergenzsatz, angewendet auf die Vektorfelder $f\, e_i \quad (i = 1, 2, 3\ )$ ist

$$\langle e_i\, , F\rangle = F_i = \int_{\partial\Omega} \langle f\, e_i, n\rangle\ do = \int_\Omega \nabla(f\, e_i)\ d\mu = \int_\Omega \tfrac{\partial f}{\partial x^i}\ d\mu = \Big\langle e_i\, ,\ \textstyle\int_\Omega \nabla f\ d\mu \Big\rangle$$

Damit ergibt sich die erste Gleichung.

Für die zweite Gleichung setze $T = \int_{\partial\Omega} (K \times n)\ do$. Ähnlich wie oben zeigen wir, dass für $i = 1, 2, 3$

$$\langle e_i\, , T\rangle = -\Big\langle e_i\, ,\ \int_\Omega (\nabla \times K)\ d\mu \Big\rangle$$

Dies prüfen wir für $i = 1$ nach. Nach dem Divergenzsatz ist

$$\begin{aligned}
\langle e_1\, , T\rangle &= \int_{\partial\Omega} (K_2 n_3 - K_3 n_2)\ do = \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -K_3 \\ K_2 \end{pmatrix}\ , n \right\rangle do \\
&= \int_\Omega \nabla \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -K_3 \\ K_2 \end{pmatrix}\ d\mu = \int_\Omega \Big(-\tfrac{\partial K_3}{\partial x^2} + \tfrac{\partial K_2}{\partial x^3} \Big)\ d\mu = -\int_\Omega \langle e_1\, , (\nabla \times K)\rangle\ d\mu \\
&= -\Big\langle e_1\, ,\ \int_\Omega (\nabla \times K) \Big\rangle\ d\mu
\end{aligned}$$