Hölder-Räume

Wir bezeichnen mit $\mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d)$ die k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ und $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

1. (**Raum** $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$) Bezeichne $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ die Supremumsnorm. Für $f \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d)$ und den *Multi-Index* $\varkappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ definieren wir $|\varkappa| = \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_d$ und $\partial^\varkappa f = \partial_1^{\varkappa_1} \ldots \partial_d^{\varkappa_d} f$. Wir betrachten die C^k-*Norm* $\|f\|_k = \sum_{|\varkappa|\leq k} \|\partial^\varkappa f\|$ und die Menge

$$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_k < \infty\} .$$

Zeige

a) $(\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_k)$ ist ein Banach-Raum.

Hinweis: Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

b) $\|f\|_k^* = \|f\| + \sum_{|\varkappa|=k} \|\partial^\varkappa f\|$ erfüllt $C\|f\|_k \leq \|f\|_k^*$ für eine Konstante $C > 0$, die nur von d und k abhängt. Also definiert $\|\cdot\|_k^*$ eine äquivalente Norm auf $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.

Hinweis: Taylorentwicklung mit Restglied

2. (**Hölder-Raum** $\mathrm{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$) Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^d)$ definieren wir

$$[f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} ,$$

wobei $|x-y|$ die euklidische Norm ist, die *Hölder-Norm* $\|f\|_{0,\alpha} = \|f\| + [f]_\alpha$ und den *Hölder-Raum*

$$\mathrm{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_{0,\alpha} < \infty\} .$$

Zeige

a) $[\cdot]_\alpha$ ist eine Halbnorm. Sie heisst *Hölder-Halbnorm*.

b) Sei $\alpha > 1$. Dann ist $[f]_\alpha < \infty$ genau dann, wenn f konstant ist. *Deshalb nehmen wir im Folgenden immer $\alpha \leq 1$ an.*

c) $(\mathrm{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{0,\alpha})$ ist ein Banach-Raum.

Bitte wenden!

d) Für $\beta \geq \alpha$ gilt $\mathrm{C}^{0,\beta}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathrm{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ und die Inklusionsabbildung ist stetig.

e) $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ ist echt enthalten in $\mathrm{C}^{0,1}(\mathbb{R}^d)$ und die Einschränkung $\|\cdot\|_{0,1}|\,\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_1$.

3. (**Hölder-Raum** $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d)$) Sei $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Für $f \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d)$ definieren wir die *Hölder-Norm*

$$\|f\|_{k,\alpha} = \|f\|_k + \sum_{|\varkappa|=k} [\partial^\varkappa f]_\alpha = \|f\|_{k-1} + \sum_{|\varkappa|=k} \|\partial^\varkappa f\|_{0,\alpha}$$

und den *Hölder-Raum*

$$\mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_{k,\alpha} < \infty\} .$$

Zeige

a) $(\mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{k,\alpha})$ ist ein Banach-Raum, der $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d)$ enthält und in $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ enthalten ist.

b) Sei $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$.

- Die Funktion $|x|^s\varphi(x)$ ist in $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ für $s > k + \alpha$.
- Wenn $s \notin \mathbb{Z}$, $\varphi(0) \neq 0$ und $s < k + \alpha$, ist $|x|^s\varphi(x)$ nicht in $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R})$.
- Wenn $\varphi(0) \neq 0$, liegt $x^{k+1}\varphi(x)1_{\mathbb{R}_{>0}}$ in $\mathrm{C}^{k,1}(\mathbb{R})$, aber nicht in $\mathrm{C}^{k+1}(\mathbb{R})$. Hier bezeichnet $1_{\mathbb{R}_{>0}}$ die charakteristische Funktion.

c) Sei $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sei $p \in \mathbb{R}^d$ mit $|p| \geq 1$. Dann gilt $\left\|\varphi(x)e^{i\langle p,x\rangle}\right\|_{k,\alpha} \leq C|p|^{k+\alpha}$, wobei die Konstante C nur von φ, d, k, α abhängt. Hier bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$.

4. (**Multiplikation von Funktionen in** $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$) Zeige, dass $fg \in \mathcal{C}^{\min\{k,l\}}(\mathbb{R}^d)$ für $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d)$ gilt und die Multiplikation eine stetige Abbildung $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}^{\min\{k,l\}}(\mathbb{R}^d)$ definiert.

5. (**Multiplikation von Funktionen in** $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d)$) Zeige, dass $fg \in \mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ für $f \in \mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{C}^{l,\beta}(\mathbb{R}^d)$ und $k + \alpha \leq l + \beta$ gilt und die Multiplikation eine stetige Abbildung $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{C}^{l,\beta}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ definiert.