Poisson-Gleichung

Wir betrachten die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^3$, wobei $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2$ den Laplace-Operator bezeichnet. Wir verwenden die in den Übungen über Hölder-Räume eingeführte Notation.

1. (**Approximation durch Funktionen aus** $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$) Sei der Träger von $f \in \mathrm{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ kompakt. Zeige, dass für $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ existiert mit $\|f - \varphi\|_{\alpha,k} < \varepsilon$.

Hinweis: Konstruiere $\delta_{\varepsilon'} \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ für $\varepsilon' > 0$, so dass

- $\delta_{\varepsilon'}(z) \geq 0$ für alle z und $\delta_{\varepsilon'}(z) = 0$ für $|z| \geq \varepsilon'$
- $\int_{\mathbb{R}^d} \delta_{\varepsilon'}(z)\,\mathrm{d}\,z = 1$

gilt. Definiere dann φ als Faltung von f mit $\delta_{\varepsilon'}$.

2. (**Schauder-Abschätzung**) Sei $0 < \alpha < 1$. Sei $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ eine Funktion mit Träger im Einheitsball $B_1(0)$. Die eindeutige beschränkte Lösung der Poisson-Gleichung ist durch Faltung mit dem Newton-Potential gegeben

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x+z)}{|z|}\,\mathrm{d}\,z\ .$$

(Der Integrand ist bei $z = 0$ unbeschränkt und wir definieren $\int_{\mathbb{R}^3} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)}$.)
Zeige

a) $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$

b) $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ und

$$\partial_j u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{z_j f(x+z)}{|z|^3}\,\mathrm{d}\,z\ .$$

c) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ und

$$\partial_{ij}^2 u(x) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \left(\frac{3 z_i z_j}{|z|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|z|^3} \right) f(x+z)\,\mathrm{d}\,z\ .$$

Bitte wenden!

d) $u \in \mathrm{C}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ und es gilt die Schauder-Abschätzung $\|u\|_{2,\alpha} \leq C\|f\|_{0,\alpha}$, wobei die Konstante C nur von α abhängt.

e) Was passiert für $\alpha = 0$?

3. Sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Sei $(f_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathrm{C}^{0,\beta}(\mathbb{R}^d)$, so dass der Träger aller f_n in derselben kompakten Menge von $\mathbb{R}^d$ enthalten ist. Zeige, dass $(f_n)_n$ eine Teilfolge hat, die in $\mathrm{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ konvergiert.

Hinweis: Verwende den Satz von Arzelà-Ascoli (ohne Beweis), um eine bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|$ konvergente Teilfolge zu konstruieren.