

Auftrieb und Drehmoment eines schwimmenden Körpers

Ein fester Körper K mit Oberfläche ∂K schwimmt in einer Flüssigkeit, deren Druck an der Stelle x mit $p(x)$ bezeichnet wird. Durch den Druck an der Oberfläche übt dann die Flüssigkeit auf den Körper die Kraft (den Auftrieb)

$$\vec{F} = - \int_{\partial K} p n \, do$$

aus. Dabei ist $n(x)$ der nach aussen zeigende Normaleneinheitsvektor in einem Punkt $x \in \partial K$.

Ist y ein beliebiger Punkt, so ist das Drehmoment um y , das durch den Druck der Flüssigkeit entsteht, gleich

$$\vec{T}(y) = - \int_{\partial K} (x - y) \times (p n) \, do$$

Wir nehmen an, dass

- der Körper auf die Druckverteilung in der Flüssigkeit keinen Einfluss hat, d.h. , dass in jedem Punkt x ausserhalb des Körpers der Druck in der Flüssigkeit so ist, wie wenn der Körper nicht da wäre. In anderen Worten: p lässt sich differenzierbar über die Punkte des Körpers fortsetzen. Wenn wir diese Fortsetzung auch mit p bezeichnen, beschreibt sie den Druck in der Flüssigkeit, wenn der Körper nicht da ist.
- die Flüssigkeit im Gleichgewicht ist. Das heisst, dass

$$\nabla p(x) = -g \rho(x) \vec{e}_3$$

wobei g die Gravitationskonstante, $\rho(x)$ die Dichte der Flüssigkeit an der Stelle x und \vec{e}_3 der dritte Einheitsvektor ist.

Nach einer Variante des Divergenzsatzes ist

$$\vec{F} = - \int_K \nabla p \, d\mu(x) = g \vec{e}_3 \int_K \rho \, d\mu(x) = M_F g \vec{e}_3$$

wobei M_F die Masse der durch den Körper verdrängten Flüssigkeit ist (Archimedisches Prinzip). Ausserdem ist

$$\vec{T}(y) = - \int_{\partial K} [p(x) (x - y)] \times n \, do = \int_K \nabla \times [p(x) (x - y)] \, d\mu(x)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \nabla \times [p(x) (x - y)] &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p(x) (x_1 - y_1) \\ p(x) (x_2 - y_2) \\ p(x) (x_3 - y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_2} (x_3 - y_3) - \frac{\partial p}{\partial x_3} (x_2 - y_2) \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} (x_1 - y_1) - \frac{\partial p}{\partial x_1} (x_3 - y_3) \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} (x_2 - y_2) - \frac{\partial p}{\partial x_2} (x_1 - y_1) \end{pmatrix} \\ &= (\nabla p)(x) \times (x - y) = -g \rho(x) \vec{e}_3 \times (x - y) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\vec{T}(y) = -g\vec{e}_3 \times \left[\int_K \rho x \, d\mu(x) - y \int_K \rho \, d\mu(x) \right] = -gM_F\vec{e}_3 \times [X - y]$$

wobei

$$X = \frac{1}{M_F} \int_K \rho x \, d\mu(x)$$

der *Schwerpunkt der durch den Körper verdrängten Flüssigkeit* ist. Insbesondere ist das Drehmoment um den Punkt X gleich Null.

Die Auftriebskraft wirkt also so, als ob die gesamte Kraft \vec{F} im Punkt X angreift. Andererseits wirkt die Gravitation auf den Körper so, wie wenn die ganze Gravitationskraft im *Schwerpunkt des Körpers* angreift. Deswegen ist es günstig, Boote so zu bauen, dass der Punkt X über dem Schwerpunkt des Körpers liegt, weil dann das die Gravitation das Boot stabilisiert.

Quelle: <http://www.math.ubc.ca/~feldman/m317/buoyancy.pdf>