Glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ (mit Rand) werden im Folgenden einfach als Mannigfaltigkeiten (mit Rand) bezeichnet.

1. (**0-dimensionale Mannigfaltigkeiten**) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeige

a) M ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit genau dann, wenn jede Teilmenge von M in der Relativtopologie von M offen ist. Dann heisst M *diskret*.

b) M ist diskret und kompakt genau dann, wenn M endlich ist.

c) M ist diskret und zusammenhängend genau dann, wenn M ein einziger Punkt ist.

2. (**Fundamentalsatz der Algebra via stereographische Projektion**) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht konstante Polynom $P(z)$ mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle hat. Beweise ihn unter Verwendung der *stereographischen Projektion* $h : \mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cong \mathbb{C}$. Hier bezeichnet S^2 die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$.

a) Konstruiere mittels h eine glatte Abbildung $f : \mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^2$ aus $P(z)$.

Hinweis: Ziehe auch die stereographische Projektion $\mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ in Betracht.

b) Welches sind die kritischen Punkte von f?

3. (**1-dimensionale Mannigfaltigkeiten**) Sei M eine zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeige, dass M zu genau einer der folgenden Mannigfaltigkeiten mit Rand diffeomorph ist: $(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$ oder S^1.

4. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $g : M \to \mathbb{R}$ glatt und 0 ein regulärer Wert von g. Zeige, dass $\{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $g^{-1}(0)$ ist.

5. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Rand. Sei N eine Mannigfaltigkeit der Dimension n, $m > n$. Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $y \in N$ ein regulärer Wert von f und von $f|\partial M$. Zeige, dass $f^{-1}(y)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m - n$ mit Rand $\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial M$ ist.

Hinweis: Aufgabe **4**. Der Fall $\partial M = \varnothing$ ist aus der Vorlesung bekannt.

6. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeige, dass offene Mengen $W_j \subseteq \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen $\Psi_j : W_j \to \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, existieren, so dass $M \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} W_j$ und $\Psi_j(W_j \cap M) = \Psi_j(W_j) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ für alle j gilt.

7. (**Approximationssatz von Weierstrass**) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P(x)$ in n Variablen und mit reellen Koeffizienten existiert, so dass $\sup_{x \in K} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$ gilt.

Hinweis: Verwende eine Faltung wie in Aufgabe **1**, Blatt Poisson-Gleichung.