Geordnete Exponentiale

Sei $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ und Mat_d die komplexwertigen $d \times d$-Matrizen. Sei $\| \cdot \|$ die Operator-Norm auf Mat_d. Sei $a < b$ und $P : [a,b] \to \mathrm{Mat}_d$ stetig.

1. Zeige, dass für $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{Mat}_d$ und $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon_0$

$$\left\| e^{\varepsilon_0 P_0} - e^{\varepsilon_1 P_1} \ldots e^{\varepsilon_n P_n} \right\| \leq e^{\varepsilon_0 C} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \|P_0 - P_j\|$$

gilt, wobei $C = \max_{0 \leq j \leq n} \|P_j\|$.

Hinweis: Teleskopsumme für $A_j, B_j \in \mathrm{Mat}_d$

$$A_1 \ldots A_n - B_1 \ldots B_n = \sum_{j=1}^{n} B_1 \ldots B_{j-1}(A_j - B_j) A_{j+1} \ldots A_n$$

2. (**Existenz**) Zeige mit Hilfe von **1.**, dass $\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right)$ existiert.

3. Zeige

$$\left\| \mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) \right\| \leq \exp\left(\int_a^b \|P(s)\|\,\mathrm{d}\,s\right)$$
$$\left\| \mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) - \mathbb{1} \right\| \leq \exp\left(\int_a^b \|P(s)\|\,\mathrm{d}\,s\right) \int_a^b \|P(s)\|\,\mathrm{d}\,s$$
$$\left\| \mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) - \mathbb{1} - \int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s \right\| \leq \frac{1}{2} \exp\left(\int_a^b \|P(s)\|\,\mathrm{d}\,s\right) \left(\int_a^b \|P(s)\|\,\mathrm{d}\,s\right)^2 .$$

4. (**Hintereinanderschaltung**) Zeige für $a < c < b$

$$\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) = \mathbb{T}\exp\left(\int_c^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) \mathbb{T}\exp\left(\int_a^c P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) .$$

Bitte wenden!

5. (**Differentialgleichung**) Sei P definiert und stetig auf einer offenen Umgebung von $[a,b]$. Dann ist $\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right)$ differenzierbar in a und b und erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial a}\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) = -\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right)P(a)$$
$$\frac{\partial}{\partial b}\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) = P(b)\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right)\ .$$

6. (**Reihenentwicklung**) Zeige

$$\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{b>s_n>\ldots s_1>a} P(s_n)\ldots P(s_1)\,\mathrm{d}\,s_1\ldots\mathrm{d}\,s_n\ .$$

7. (**Addition von Skalaren**) Für $q:[a,b]\to\mathbb{C}$ stetig gilt

$$\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b (P(s)+q(s)\mathbb{1})\,\mathrm{d}\,s\right) = \exp\left(\int_a^b q(s)\,\mathrm{d}\,s\right)\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right)\ .$$

8. (**Inverse**) $\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right)$ ist invertierbar und

$$\left[\mathbb{T}\exp\left(\int_a^b P(s)\,\mathrm{d}\,s\right)\right]^{-1} = \mathbb{T}\exp\left(-\int_{-b}^{-a} P(-s)\,\mathrm{d}\,s\right) = \left[\mathbb{T}\exp\left(-\int_a^b P(s)^t\,\mathrm{d}\,s\right)\right]^t\ .$$

Hier bezeichnet $(\cdot)^t$ die Transposition.