Lineare Algebra I

D-MATH, Winter 2016

Prof. Emmanuel Kowalski

Lineare Algebra I

Zwischenprüfung

24. Februar 2016

Prüfungsversion **A**

Wichtig:

- Die Prüfung dauert *120 Minuten*.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studierendenausweis) offen auf den Tisch.
- Notieren Sie die Version Ihrer Prüfung, Ihre Leginummer und Ihren Namen *in Blockschrift* auf dem Antwortblatt.
- Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch, und achten Sie besonders auf die Begriffe *abhängig* und *unabhängig*.
- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen. Aufgaben 1–11 sind grösstenteils rechnerisch, die übrigen Aufgaben sind theoretisch.
- Ein Antwortkästchen muss *ausgemalt* werden, um es zu markieren. Bitte schreiben Sie auf dem Antwortblatt nur mit Füllfederhalter oder Kugelschreiber und nur in blau oder schwarz. Machen Sie *keine* Notizen auf dem Antwortblatt. Korrekturen auf dem Antwortblatt bitte mit *Tipp-Ex* durchführen.
- Am Ende der Prüfung tragen Sie als Prüfsumme die Anzahl der von Ihnen ausgemalten Felder auf dem Antwortblatt ein.
- Nach Ende der Prüfung wird das Antwortblatt eingesammelt; das Aufgabenblatt können Sie mitnehmen.
- In jeder Aufgabe (bzw. Teilaufgabe, gekennzeichnet durch (i), (ii) usw.) ist genau eine Antwort richtig. Ist diese und nur diese Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *2 Punkte*.
  Ist keine Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *0 Punkte*.
  Ist eine falsche Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *1 Minuspunkt*.
- Hilfsmittel: Keine.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

Wir bezeichnen als $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ den Vektorraum von Polynomen mit reellen Koeffizienten. Für $n \geq 0$, sei $\mathcal{P}_n = \{P \in \mathcal{P} : P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n\}$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^4 - A^2 + 1_2$.

a) $\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Welche der folgenden Aussagen gilt für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda x \; + y \quad\; &= 1 \\ x \; + \lambda y + z \; &= \lambda \\ x \; + y + \lambda z &= \lambda^2? \end{aligned}$$

a) Das System hat eine eindeutige Lösung für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Das System hat keine Lösung für $\lambda = -2$.

c) Das System hat mehr als eine Lösung für $\lambda = 0$.

d) Keine von den Aussagen **a)**, **b)**, **c)** gilt.

3. Sei V ein reeller Vektorraum, und $\{x, y, z\}$ eine linear unabhängige Menge in V. Ist die Menge $\{x + y, y + z, z + x\}$ linear abhängig?

a) Die Antwort hängt von den Vektoren x, y, z ab.

b) Ja.

c) Nein.

4. Sei V ein reeller Vektorraum, $u, v, w, z \in V$ und

$$\begin{aligned} v_1 &= u + v + w + z \\ v_2 &= 2u + 2v + w - z \\ v_3 &= u - w + z \\ v_4 &= -v + w - z \\ v_5 &= u + v + 3w - z. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Ist die Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ linear abhängig?

a) Die Antwort hängt von den Vektoren u, v, w, z ab.

b) Ja.

c) Nein.

5. Sei

$$S = \{(1,1,0,1,1),\ (0,0,1,1,0),\ (0,1,0,0,0),\ (1,0,0,1,1),\ (1,0,1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Was ist die Dimension von $\langle S \rangle$?

a) 5; **b)** 4; **c)** 3; **d)** 2.

6. Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums $V = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) + p(-1) = 0\}$.

a) $\dim V = 4$. **b)** $\dim V = 3$. **c)** $\dim V = 2$.

7. Seien $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{C} = \{x^2, (x+1)^2, (x+2)^2\}$ geordnete Basen von $\mathcal{P}_2$. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{C}$.

a) $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

e) $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Welche Aussage gilt?

a) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(-2, -8, 3)$.

b) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(1, 7, -10)$.

Bitte wenden!

c) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(-8, 18, 1)$.

d) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(9, -5, 14)$.

e) Die Matrix A ist nicht invertierbar.

9. Sei f die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_4 &\longrightarrow \mathcal{P}_4 \\ P(X) &\longmapsto (X+1)P'(X). \end{aligned}$$

Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die folgenden geordneten Basen von $\mathcal{P}_4$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = (1, x+1, x^2, x^3, (x+1)^4).$$

(i) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$.

a) $\operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. **c)** $\operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $\operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **d)** $\operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(ii) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

e) $\operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -12 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}$.

f) $\operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

g) $\mathrm{Mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -16 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}$.

h) $\mathrm{Mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 9. \end{pmatrix}.$$

a) Rang $A = 4$, Rang $B = 3$.

b) Rang $A = 3$, Rang $B = 4$.

c) Rang $A = 3$, Rang $B = 3$.

d) Rang $A = 3$, Rang $B = 2$.

e) Rang $A = 2$, Rang $B = 3$.

f) Rang $A = 2$, Rang $B = 2$.

11. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig?

(i) $\{1+i, 1-i\} \subset \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ als ein $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefasst wird;
(ii) $\{1+i, 1-i\} \subset \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ als ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst wird;
(iii) $\{x^3+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^2+2\} \subset \mathcal{P}_3$.
(iv) $\{(1,2,3,4),\ (-3,4,2,8),\ (-3,9,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$;
(v) $\{(1,0,0,1),\ (2,3,-3,9),\ (1,3,-4,7),\ (2,0,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$.

12. Sei V der Vektorraum von Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{B}$. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig in V?

(i) $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, wobei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = (x+1)^2$, $f_4(x) = x$;
(ii) $\{f_1, f_2, f_3\}$, wobei f_1, f_2, f_3 wie in (i);
(iii) $\{h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $h_n(x) = 1/(x+n)$;
(iv) $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $g_n(x) = e^{nx}$.

13. Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{K})$. Sind die folgenden Mengen Unterräume von V?

Bitte wenden!

(i) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d\right\}$;

(ii) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0\right\}$;

(iii) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0\right\}$;

(iv) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V\right\}$.

Hinweis zu den Aufgaben 14-21. Eine Aussage, die Variablen beinhaltet, gilt genau dann als *wahr* (W), wenn sie für jede Wahl der Variablen zutrifft. Amsonsten gilt sie als *falsch* (F).

14. Sei $f\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ die Abbildung sodass $f(P) = P + P''$. Welche Aussagen sind wahr?

(i) f ist surjektiv.

(ii) f ist injektiv.

15. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $S \subset V$ eine Untermenge. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Falls $|S| \leq \dim(V)$, ist S ein Erzeugendensystem von V.

(ii) Falls S ein Unterraum ist, dann ist S linear unabhängig.

(iii) S enthält eine Basis von V.

16. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V.

(ii) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild $f^{-1}(W')$ ein Unterraum von V, und es gilt

$$\dim f^{-1}(W') = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim(\operatorname{Im}(f) \cap W')\,.$$

(iii) Falls das Bild von f eine Basis von W enthält, ist f surjektiv.

(iv) Falls $\dim(V) < \dim(W)$, ist f nicht injektiv.

(v) Falls $S \subset V$ linear unabhänging ist, dann ist $f(S) \subset W$ linear unabhängig.

17. Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung sodass $f(P)(X) = P(X+1)$, z.B. $f(X^2) = (X+1)^2$. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Die Abbildung f ist bijektiv und $f^{-1}(P) = P - 1$.

(ii) Die Abbildung f ist injektiv.

(iii) Die Abbildung f ist surjektiv.

18. Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für alle $x, y, z \in V \setminus \{0\}$ mit $x + y + z = 0$?

(i) $\dim\langle\{x, y, z\}\rangle = 2$.

(ii) $\langle\{x, y\}\rangle = \langle\{y, z\}\rangle$.

(iii) Die Menge $\{x, y, z\}$ ist linear unabhängig.

19. Seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Sei $m = 3$ und $n = 2$. Dann ist AB nicht invertierbar.

(ii) Wenn A und B invertierbar sind, dann ist AB auch invertierbar.

(iii) Wenn $AB = 1_m$, dann ist $BA = 1_n$.

20. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Welche Aussagen sind wahr?

(i) $A^2 \neq 0$.

(ii) Kein Koeffizient a_{ij} von A ist Null.

(iii) $m \geq n$.

(iv) $A^{-1} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.

(v) $m = n$.

21. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ injektiv.

(ii) Eine lineare Abbildung ist injektiv genau dann, wenn sie surjektiv ist.