D-MATH, Winter 2016 | Prof. Emmanuel Kowalski

Lineare Algebra I

Lösung der Zwischenprüfung

Prüfungsversion **A**

Wichtig:

- In jeder Aufgabe (bzw. Teilaufgabe, gekennzeichnet durch (i), (ii) usw.) ist genau eine Antwort richtig. Ist diese und nur diese Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *2 Punkte*.
  Ist keine Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *0 Punkte*.
  Ist eine falsche Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *1 Minuspunkt*.

Bitte wenden!

Wir bezeichnen als $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ den Vektorraum von Polynomen mit reellen Koeffizienten. Für $n \geq 0$, sei $\mathcal{P}_n = \{P \in \mathcal{P} : P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n\}$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^4 - A^2 + 1_2$.

Lösung. $A^4 - A^2 + 1_2 = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Welche der folgenden Aussagen gilt für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda x \; + y \quad &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 ? \end{aligned}$$

Lösung. Das System hat eine eindeutige Lösung für $\lambda \notin \left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ und mehrere Lösungen für $\lambda = 1$. Für $\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ existiert keine Lösung.

3. Sei V ein reeller Vektorraum, und $\{x, y, z\}$ eine linear unabhängige Menge in V. Ist die Menge $\{x + y, y + z, z + x\}$ linear abhängig?

Lösung. Die Menge $\{x + y, y + z, z + x\}$ ist linear unabhängig.

4. Sei V ein reeller Vektorraum, $u, v, w, z \in V$ und

$$\begin{aligned} v_1 &= u + v + w + z \\ v_2 &= 2u + 2v + w - z \\ v_3 &= u - w + z \\ v_4 &= -v + w - z \\ v_5 &= u + v + 3w - z. \end{aligned}$$

Ist die Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ linear abhängig?

Lösung. Die Menge $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ liegt im Vektorraum $W = \langle\{u, v, w, z\}\rangle$ mit $\dim W \leq 4$. Somit ist S linear abhängig.

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei

$$S = \{(1,1,0,1,1),\ (0,0,1,1,0),\ (0,1,0,0,0),\ (1,0,0,1,1),\ (1,0,1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Was ist die Dimension von $\langle S \rangle$?

Lösung. $\dim\langle S \rangle = 4$.

6. Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums $V = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) + p(-1) = 0\}$.

Lösung. $\dim V = 4$.

7. Seien $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{C} = \{x^2, (x+1)^2, (x+2)^2\}$ geordnete Basen von $\mathcal{P}_2$. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{C}$.

Lösung. $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Welche Aussage gilt?

a) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(-2, -8, 3)$.

b) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(1, 7, -10)$.

c) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(-8, 18, 1)$.

d) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(9, -5, 14)$.

e) Die Matrix A ist nicht invertierbar.

Lösung Die Matrix A ist invertierbar und $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Sei f die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_4 &\longrightarrow \mathcal{P}_4 \\ P(X) &\longmapsto (X+1)P'(X). \end{aligned}$$

Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die folgenden geordneten Basen von $\mathcal{P}_4$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = (1, x+1, x^2, x^3, (x+1)^4).$$

Bitte wenden!

(i) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung. $\mathrm{Mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

(ii) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Lösung.

$$\mathrm{Mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 9. \end{pmatrix}.$$

Lösung. Rang $A = 2$, Rang $B = 3$.

11. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig?

(i) $\{1+i, 1-i\} \subset \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ als ein $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefasst wird, ist linear abhängig.

(ii) $\{1+i, 1-i\} \subset \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ als ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst wird, ist linear unabhängig.

(iii) $\{x^3+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^2+2\} \subset \mathcal{P}_3$ ist linear unabhängig.

(iv) $\{(1,2,3,4),\ (-3,4,2,8),\ (-3,9,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$ ist linear unabhängig: aus

$$a\cdot(1,2,3,4) + b\cdot(-3,4,2,8) + c\cdot(-3,9,1,3) = 0$$

folgt in der ersten Koordinate $a = 3(b+c)$. Eingesetzt in die drei weiteren Koordinaten ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} 10b & + & 15c & = & 0, \\ 11b & + & 10c & = & 0, \\ 20b & + & 15c & = & 0. \end{array}$$

Durch Subtrahieren der ersten Zeile von der dritten ergibt sich $10b = 0$ und somit $b = 0$, womit sofort $c = 0$ und dann $a = 0$ folgt.

Siehe nächstes Blatt!

(v) $\{(1,0,0,1),\ (2,3,-3,9),\ (1,3,-4,7),\ (2,0,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$ ist linear abhängig. Denn, es gilt

$$(1,0,0,1)+(2,3,-3,9)=(1,3,-4,7)+(2,0,1,3).$$

12. Sei V der Vektorraum von Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig in V?

(i) $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, wobei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = (x+1)^2$, $f_4(x) = x$, ist linear abhängig.

(ii) $\{f_1, f_2, f_3\}$, wobei f_1, f_2, f_3 wie in (i), ist linear unabhängig.

(iii) $\{h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $h_n(x) = 1/(x+n)$, ist linear unabhängig.

(iv) $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $g_n(x) = e^{nx}$, ist linear unabhängig.

13. Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{K})$. Sind die folgenden Mengen Unterräume von V?

(i) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d\right\}$;
- Ja.

(ii) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0\right\}$;
- Ja.

(iii) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0\right\}$;
- Nein.

(iv) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V\right\}$;
- Nein.

Hinweis zu den Aufgaben 14-21. Eine Aussage, die Variablen beinhaltet, gilt genau dann als *wahr* (W), wenn sie für jede Wahl der Variablen zutrifft. Amsonsten gilt sie als *falsch* (F).

14. Sei $f\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ die Abbildung sodass $f(P) = P + P''$. Welche Aussagen sind wahr?

(i) f ist surjektiv.

(ii) f ist injektiv.

Lösung. Wir können direkt nachprüfen, dass f injektiv ist. Es folgt aus dem Rangsatz, dass f surjektiv ist.

15. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $S \subset V$ eine Untermenge. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Bitte wenden!

(i) Falls $|S| \leq \dim(V)$, ist S ein Erzeugendensystem von V.
- Falsch.

(ii) Falls S ein Unterraum ist, dann ist S linear unabhängig.
- Falsch.

(iii) S enthält eine Basis von V.
- Falsch.

16. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V.
- Wahr.

(ii) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild $f^{-1}(W')$ ein Unterraum von V, und es gilt

$$\dim f^{-1}(W') = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap W')\,.$$

- Wahr (nach dem Rangsatz).

(iii) Falls das Bild von f eine Basis von W enthält, ist f surjektiv.
- Wahr.

(iv) Falls $\dim(V) < \dim(W)$, ist f nicht injektiv.
- Falsch, z.B. die Nullabbildung $f : \{0\} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

(v) Falls $S \subset V$ linear unabhänging ist, dann ist $f(S) \subset W$ linear unabhängig.
- Falsch.

17. Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung sodass $f(P)(X) = P(X+1)$, z.B. $f(X^2) = (X+1)^2$. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Die Abbildung f ist bijektiv und $f^{-1}(P) = P - 1$.
- Falsch, die Inverse ist $g(P)(X) = P(X-1)$.

(ii) Die Abbildung f ist injektiv.
- Wahr.

(iii) Die Abbildung f ist surjektiv.
- Wahr.

Siehe nächstes Blatt!

18. Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für alle $x, y, z \in V \setminus \{0\}$ mit $x + y + z = 0$?

(i) $\dim\langle\{x, y, z\}\rangle = 2$.
- Falsch, z.B. $y = z = -\frac{x}{2}$.

(ii) $\langle\{x, y\}\rangle = \langle\{y, z\}\rangle$.
- Wahr.

(iii) Die Menge $\{x, y, z\}$ ist linear unabhängig.
- Falsch nach der Definition der Unabhängigkeit.

19. Seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Sei $m = 3$ und $n = 2$. Dann ist AB nicht invertierbar.
- Wahr.

(ii) Wenn A und B invertierbar sind, dann ist AB auch invertierbar.
- Wahr.

(iii) Wenn $AB = 1_m$, dann ist $BA = 1_n$.
- Falsch.

20. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Welche Aussagen sind wahr?

(i) $A^2 \neq 0$.
- Wahr.

(ii) Kein Koeffizient a_{ij} von A ist Null.
- Falsch.

(iii) $m \geq n$.
- Wahr.

(iv) $A^{-1} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.
- Wahr.

(v) $m = n$.
- Wahr.

21. Welche Aussagen sind wahr?

(i) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ injektiv.
- Falsch: da $\dim(\mathbb{R}^4) > \dim(\mathbb{R}^4)$, ist keine lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ injektiv.

Bitte wenden!

(ii) Eine lineare Abbildung ist injektiv genau dann, wenn sie surjektiv ist.
- Falsch, z.B. die Nullabbildung $f : \mathbb{R} \to \{0\}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.