# Lösung 1

**1. a)** Wir benutzen die Eigenschaft der Determinante, die besagt, dass die Determinante eines Produktes gleich dem Produkt der Determinanten ist. Da ausserdem $\det(X^{-1}) = (\det X)^{-1}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 490 \\ -8\pi & 3507 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 200 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 490 \\ -8\pi & 3507 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 200 & 5 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 15 \cdot 6 \cdot 5 = 450.
\end{aligned}$$

**b)** Wiederum benutzen wir, dass die Determinante mit Produkten vertauscht, also

$$\det(B) = \det\left(\prod_{j=-3}^{5}\begin{pmatrix} j-3 & j^2 \\ (j+3)^2 & 2j \end{pmatrix}\right) = \prod_{j=-3}^{5}\det\begin{pmatrix} j-3 & j^2 \\ (j+3)^2 & 2j \end{pmatrix}.$$

Da

$$\det\begin{pmatrix} j-3 & j^2 \\ (j+3)^2 & 2j \end{pmatrix}\Bigg|_{j=0} = \det\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ist, verschwindet ein Faktor und somit ist das ganze Produkt gleich $0$. Also ist $\det(B) = 0$.

**c)** Wir ziehen den Faktor $2$ aus der ersten Zeile und erhalten

$$\det(C) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Mit der Formel für die Vandermonde Determinante berechnen wir

$$\begin{aligned}
\det(C) &= 2 \cdot \prod_{1\le i<j\le 4}(t_j - t_i) \quad \text{mit } t_1 = 3, t_2 = -1, t_3 = 5, t_4 = 2 \\
&= 2 \cdot (t_4 - t_3)(t_4 - t_2)(t_4 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1) \\
&= 2 \cdot (-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 6 \cdot 2 \cdot (-4) \\
&= -864.
\end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

**d)** Die erste Zeile von $D$ ist das Doppelte der letzten Zeile. Somit sind die Zeilen linear abhängig und die Matrix $D$ ist nicht invertierbar. Dies bedeutet aber gerade, dass $\det(D) = 0$ ist.

**2.** **a)** Wir berechnen

$$\det\left(\begin{pmatrix} x^4+3x^3-2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x^3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} x^4-2 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= x^4 - 2 - 14 = x^4 - 16.$$

Gesucht sind also alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x^4 = 16$. Wir erhalten $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2i$ und $x_4 = -2i$.
Bemerkung: Es gilt zu beachten, dass im Allgemeinen $\det(X+Y) \neq \det X + \det Y$ gilt. Mit

$$X = \begin{pmatrix} x^4+3x^3-2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} -3x^3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir zum Beispiel

$$\det X + \det Y = 0 + (-3x^3) = -3x^3 \neq x^4 - 16 = \det(X+Y).$$

**b)** Es gilt

$$\text{Zweite Zeile} = 3 \cdot (\text{Erste Zeile}) - 2 \cdot (\text{Vierte Zeile}).$$

Somit sind die Zeilen linear abhängig. Folglich ist die Matrix nicht invertierbar, hat also Determinante $0$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

**3.** Die dritte Zeile ist durch $5$ teilbar. Somit haben wir

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \\ -25 & 10 & 0 & 100 \\ 5 & -2 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \\ -5 & 2 & 0 & 20 \\ 5 & -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Da die Koeffizienten der Matrix auf der rechten Seite in $\mathbb{Z}$ liegen, ist auch die Determinante dieser Matrix eine ganze Zahl. Somit ist die rechte Seite ein ganzzahliges Vielfaches von $5$, also durch $5$ teilbar.

**4.** **a)** Die Inverse einer Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ kann nach folgendem Rezept berechnet werden: Man vertausche die beiden Zeilen und ordne die

**Siehe nächstes Blatt!**

Spalten so an, dass in der ersten Zeile wiederum die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in genau dieser Reihenfolge stehen. Wir erhalten

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma, \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau$$

$$\text{und} \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \eta.$$

**b)** Die gesuchten Verknüpfungen sind

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \sigma \circ \tau,$$

$$\sigma \circ \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \sigma \circ \eta$$

$$\text{und} \quad \sigma \circ \tau \circ \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt also im Allgemeinen $\sigma_1 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_1$.

**5.**
- Der Wechsel zwischen Permutation $\sigma \in S_n$ und Permutationsmatrix $P_\sigma \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ erfolgt mit der Formel
$$P_\sigma = \left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right),$$
wobei $e_j$ der $j$-te Einheitsvektor ist.
- Das Signum wurde in der Vorlesung definiert als die Determinante der dazugehörigen Permuationsmatrix. Diese kann beispielsweise berechnet werden durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte.

**a)** $P_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_3$

Da die Determinante einer Einheitsmatrix immer $1$ ist, erhalten wir

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = \det(1_3) = 1.$$

**b)** $P_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhalten wir

$$\sigma_2 = \det(P_{\sigma_2}) = 1 \cdot \det(1_6) = 1.$$

**Bitte wenden!**

**c)** $P_{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Durch wiederholtes Entwickeln erhalten wir

$$\sigma_3 = \det(P_{\sigma_3}) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

**d)** $\sigma_{P_1} = \mathrm{id}_{S_{10}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

Wie in Aufgabe a) erhalten wir

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{P_1}) = \det(P_1) = \det(1_{10}) = 1.$$

**e)** $\sigma_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Entwickeln nach der ersten Zeile (oder der ersten Spalte) liefert

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{P_2}) = \det(P_2) = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

**f)** $\sigma_{P_{3,n}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Wir zeigen per Induktion, dass $\operatorname{sgn}(\sigma_{P_{3,n}}) = \det(P_{3,n}) = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$ ist:
Für $n = 1$ stimmt die Aussage $\det(1) = (-1)^0$.
Nehme an, die Aussage gelte für jede solche Matrix von Grösse kleiner gleich $n-1$. Wir berechnen mit Entwicklung nach der ersten Zeile und durch verwenden der Induktionsannahme:

$$\det(P_{3,n}) = (-1)^{n+1} \det(P_{3,n-1}) = (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)^2-(n-1))}{2}} = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}.$$