Serie 2

1. Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Produkt von Transpositionen. Lesen Sie daraus das Signum der jeweiligen Permutation ab.

a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

- Das Produkt der Transpositionen erhält man, indem man sich die benötigten Zeilenvertauschungen überlegt, um von der Permutationsmatrix P die Einheitsmatrix 1_n zu erhalten. Für eine methodische Vorgehensweise, betrachte Beispiel 3.6.9 im Skript. Beachte, dass die Darstellung einer Permutation als Produkt von Transpositionen nicht eindeutig ist!
- Das Signum der Permutation kann man bestimmen, indem man die Anzahl Faktoren in der Zerlegung in Transpositionen zählt. Ist sie gerade, ist das Signum $+1$, ansonsten -1.
  [Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Seien $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ Transpositionen, so dass $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_s$ ist. Die zugehörige Permutationsmatrix ist $P_\sigma = P_{\tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_s} = P_{\tau_1} P_{\tau_2} \cdots P_{\tau_s}$. Da jede Transposition Signum -1 hat, folgt $\operatorname{sgn}(\sigma) = \det(P_\sigma) = \det(P_{\tau_1} P_{\tau_2} \cdots P_{\tau_s}) = \det P_{\tau_1} \cdot \det P_{\tau_2} \cdots \det P_{\tau_s} = (-1)^s$.]

Wir bezeichnen mit $\tau_{i,j}$ die Transposition, die i und j vertauscht.

$\sigma_1 = \tau_{2,3}$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^1 = -1$.

b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung

$\sigma_2 = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{6,7}$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^6 = 1$.

c) $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung

$\sigma_3 = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{4,5}$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_3) = (-1)^3 = -1$.

2. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation, also

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ein Tupel $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ mit $i < j$ heisst *Fehlstand* von σ, falls $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist.

Die Fehlstände von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ sind zum Beispiel die Tupel $(1,2), (1,4)$ und $(3,4)$.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage:
Das Signum von $\sigma \in S_n$ kann berechnet werden als $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r$, wobei r die Anzahl Fehlstände von σ bezeichnet.

Lösung

Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Wir beweisen die Aussage per Induktion über die Anzahl Fehlstände r von σ.

$r = 0$: Hat σ keine Fehlstände, so ist σ die Identität. Die zugehörige Permutationsmatrix $P_\sigma = 1_n$ hat Determinante 1. Folglich ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1 = (-1)^0$.

$r - 1 \Rightarrow r$: Sei $r \geq 1$. Wir nehmen an, die Aussage gelte für alle Permutationen mit $r - 1$ Fehlständen. Wir wollen zeigen, dass die Aussage auch für Permutationen mit r Fehlständen gilt. Sei also σ eine Permutation mit r Fehlständen. Sei i die kleinste Zahl, die in einem Fehlstand vorkommt. Sei also $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ minimal, so dass (i, l) ein Fehlstand ist für ein $l \in \{i + 1, \ldots, n\}$. (Bemerkung: Dieses i existiert, da σ mindestens einen Fehlstand hat.) Wegen der Minimalität von i wissen wir, dass $\sigma(s) = s$ für alle $s \leq i - 1$. Sei $j \in \{i + 1, \ldots, n\}$ so, dass $\sigma(j) = \sigma(i) - 1$ ist. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & \sigma(i) & \sigma(i+1) & \cdots & \sigma(j-1) & \sigma(i)-1 & \sigma(j+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\
&= \tau_{\sigma(i)-1,\sigma(i)} \\
&\quad \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & \sigma(i)-1 & \sigma(i+1) & \cdots & \sigma(j-1) & \sigma(i) & \sigma(j+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}}_{=:\eta},
\end{aligned}$$

wobei $\tau_{\sigma(i)-1,\sigma(i)}$ die Transposition ist, die $\sigma(i) - 1$ und $\sigma(i)$ vertauscht. Da das Signum einer Transposition -1 ist, erhalten wir

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_{\sigma(i)-1,\sigma(i)}) \operatorname{sgn}(\eta) = -\operatorname{sgn}(\eta).$$

Man bemerke, dass die Fehlstände von η diesselben sind wie diejenigen von σ mit der Ausnahme, dass (i, j) ein Fehlstand von σ jedoch keiner von η ist. Folglich hat η genau $r - 1$ Fehlstände und nach Induktionsannahme gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1) \cdot \operatorname{sgn}(\eta) = (-1) \cdot (-1)^{r-1} = (-1)^r.$$

Dies beendet den Beweis.

b) Prüfen Sie die berechneten Signa in Aufgabe 5 aus Serie 1 nach, indem Sie die Fehlstände der jeweiligen Permutationen zählen.

Lösung

- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ hat keine Fehlstände, also $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1$.
- $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Fehlstände (1,7), (2,7), (3,7), (4,7), (5,7) und (6,7). Es folgt, dass $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^6 = 1$.

- $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Fehlstände (1,3), (2,3) und (4,5). Folglich ist $\mathrm{sgn}(\sigma_3) = (-1)^3 = -1$.
- $\sigma_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ hat keine Fehlstände, also $\mathrm{sgn}(\sigma_{P_1}) = (-1)^0 = 1$.
- $\sigma_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ hat Fehlstand (1,2). Somit ist $\mathrm{sgn}(\sigma_{P_2}) = (-1)^1 = -1$.
- $\sigma_{P_{3,n}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat Fehlstände (1,2), (1,3), ... , (1,n), (2,3), (2,4) , ... , (2,n) , ... , (n-2,n-1), (n-2,n) und (n-1,n). Die Anzahl der Fehlstände ist also $(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ Wir erhalten $\mathrm{sgn}(\sigma_{P_{3,n}}) = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$.

3. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit der Leibniz Formel (Proposition 3.6.11 aus dem Skript).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung

Die Leibniz Formel besagt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_4} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} a_{4,\sigma(4)}.$$

Beachte, dass der zu einem fixen $\sigma \in S_4$ gehörige Summand genau dann verschwindet, wenn es ein $i \in \{1,2,3,4\}$ gibt mit $a_{i,\sigma(i)} = 0$. Die einzigen $\sigma \in S_4$, für die der Summand nicht verschwindet, sind in unserem Fall also

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\text{und} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{4} \mathrm{sgn}(\sigma_i) a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} a_{3,\sigma_i(3)} a_{4,\sigma_i(4)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 3 \\ &\quad + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 5 \\ &= -70. \end{aligned}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 13 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

Beachte, dass in der Leibniz Formel die Summanden folgende Bedeutung haben: Man nehme n (= Dimension der Matrix) Elemente, so dass aus jeder Zeile und aus jeder Spalte der Matrix genau ein Eintrag genommen wurde. Zusammen mit dem Signum der zugehörigen Permutation erhalten wir einen der Summanden. Jeder der Summanden in der Leibniz Formel wird auf diese Weise erhalten.

Da in der vorliegenden Matrix B nur ein Eintrag in der zweiten Zeile nicht verschwindet, kommt dieser ($b_{22} = 2$) in jedem nicht-verschwindenden Summanden in der Leibniz Formel vor. Das analoge Argument mit der 5. Spalte impliziert, dass $b_{55} = 2$ ebenfalls in jedem nicht-verschwindenden Summand vorkommt. Da b_{22} vorkommen muss, kann kein weiterer Eintrag aus der zweiten Spalte vorkommen, weshalb $b_{33,}$ ebenfalls immer vorkommen muss. Deshalb sind die einzigen Permutationen, deren Summand in der Leibniz Formel nicht verschwindet, von der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ * & 2 & 3 & * & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gibt genau zwei Permutationen, auf die dies zutrifft, nämlich

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit der Leibniz Formel erhalten wir nun für die Determinante

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{i=1}^{2} \operatorname{sgn}(\sigma_i) a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} a_{3,\sigma_i(3)} a_{4,\sigma_i(4)} a_{5,\sigma_i(5)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 \\ &= -16. \end{aligned}$$

4. Benutzen Sie die Leibniz Formel (Proposition 3.6.11 aus dem Skript) um die folgenden Eigenschaften von Determinanten (nochmals) zu beweisen. Die Eigenschaften des Signums (Definition 3.6.6) dürfen hierfür vorausgesetzt werden.

a) Für alle $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\det({}^tA) = \det(A)$.

Lösung

Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in_{n,n} (\mathbb{K})$. Bezeichne die transponierte Matrix mit ${}^tA = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, also $b_{ij} = a_{ji}$. Mit der Leibniz Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),\sigma^{-1}(\sigma(1))} a_{\sigma(2),\sigma^{-1}(\sigma(2))} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}(\sigma(n))}. \end{aligned}$$

Da σ per Definition eine Bijektion ist, gilt $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Durch Umordnen der Faktoren $a_{\sigma(i),\sigma^{-1}(\sigma(i))} = a_{j,\sigma^{-1}(j)}$ für $\sigma(i) = j$ erhalten wir weiters

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

Anstatt über σ können wir auch über $\sigma^{-1} =: \tau$ summieren:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \cdots a_{n,\tau(n)}.
\end{aligned}$$

Mit $\operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau)$ erhalten wir schliesslich

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \cdots a_{n,\tau(n)} = \det(A).$$

b) Für alle $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Lösung

Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ zwei Matrizen. Die Koeffizienten des Produkts $C = AB$ sind von der Form $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Mit der Leibniz Formel berechnen wir

$$\begin{aligned}
\det(AB) = \det(C) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{1,\sigma(1)} c_{2,\sigma(2)} \cdots c_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_n) \\ \in \{1,2,\ldots,n\}^n}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_n) \\ \in \{1,2,\ldots,n\}^n}} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

In der fünften Gleichheit wurden lediglich die Terme umgeordnet, was legitim ist, da es nur endlich viele sind. Die Notation $\displaystyle\sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_n) \\ \in \{1,2,\ldots,n\}^n}}$ ist gleichbedeutend wie $\displaystyle\sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n}$. Wir zeigen, dass der Summand $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)}$ verschwindet, falls die $k_1, \ldots, k_n$ nicht paarweise verschieden sind. Nehmen wir also an, dass $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $r \neq s$ und $k_r = k_s$. Wähle ein $\sigma \in S_n$ und setze $\eta := \sigma \circ \tau_{r,s}$, wobei $\tau_{r,s}$ die Transposition ist, die r und s vertauscht (also

$\tau_{r,s}(r) = s, \tau_{r,s}(s) = r$ und $\tau_{r,s}(l) = l$ für alle $l \notin \{r, s\}$). Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\eta) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\eta(i)} &= \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau_{r,s}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(\tau_{r,s}(i))} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{\operatorname{sgn}(\tau_{r,s})}_{=-1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \notin \{r,s\}}}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)} \right) a_{r,k_r} b_{k_r,\sigma(s)} a_{s,k_s} b_{k_s,\sigma(r)} \\
&\overset{k_r = k_s}{=} -\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)} &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\underbrace{\sigma \circ \tau_{r,s}}_{=:\eta}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(\tau_{r,s}(i))} \\
&= - \sum_{\eta \in S_n} \operatorname{sgn}(\eta) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\eta(i)}.
\end{aligned}$$

Wie gewünscht folgt nun $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)} = 0$, falls die k_i nicht paarweise verschieden sind.
Für jedes Tupel $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ bestehend aus paarweise verschiedenen $k_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es genau eine Permutation $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix} \in S_n$, so dass $k_i = \tau(i)$ für alle i. Ausserdem erhält man jede Permutation in S_n auf diese Weise aus einem n-Tupel mit paarweise verschiedenen Komponenten. Deshalb kann man anstatt über die Tupel $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ auch über die Permutationen $\tau \in S_n$ summieren. Aus Gleichung (1) folgt nun

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_n) \\ \in \{1,2,\ldots,n\}^n}} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_n) \\ \in \{1,2,\ldots,n\}^n \\ \text{paarweise verschieden}}} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} b_{\tau(i),\sigma(i)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} \prod_{j=1}^{n} b_{\tau(j),\sigma(j)}.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $l := \tau(j)$ erhält man wegen der Bijektivität von τ:

$$= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} \prod_{l=1}^{n} b_{l,\sigma(\tau^{-1}(l))}.$$

Nun substituieren wir $\eta := \sigma \circ \tau^{-1}$ und erhalten

$$= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\eta \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\eta \circ \tau)}_{=\operatorname{sgn}(\eta)\operatorname{sgn}(\tau)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} \prod_{l=1}^{n} b_{l,\eta(l)}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} \cdot \sum_{\eta \in S_n} \operatorname{sgn}(\eta) \prod_{l=1}^{n} b_{l,\eta(l)} = \det(A)\det(B).$$

5. Sei $V := \mathbb{R}^5$. Seien $v_1 := (0,1,0,-1,0), v_2 := (5,-2,3,0,1), v_3 := (2,0,3,0,-1), v_4 := (3,0,0,-2,2)$ Vektoren in V. Wir definieren Unterräume $V_1, V_2 \in V$ durch $V_1 := \langle v_1, v_2 \rangle$ und $V_2 := \langle v_3, v_4 \rangle$. Berechnen Sie $\dim(V_1 + V_2)$ und bestimmen Sie den Vektorraum $V_1 + V_2$.

Lösung
Es gilt $V_1 + V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Um die Dimension von $V_1 + V_2$ zu bestimmen, schreiben wir die Erzeuger $v_1, \ldots, v_4$ in die Spalten einer Matrix und bestimmen deren Rang mittels Gauss-Umformungen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $\dim(V_1 + V_2) = 3$ und somit $V_1 + V_2 \cong \mathbb{R}^3$.

6. Es seien V_1 und V_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^7$ mit $\dim V_1 = 2$ und $\dim V_2 = 4$. Welche Zahlenpaare (p, q) können als Dimensionen der Räume $V_1 + V_2$ und $V_1 \cap V_2$ auftreten?

Lösung
Da $V_1, V_2 \subset V_1 + V_2$ gilt offenbar $\dim(V_1 + V_2) \geq \max\{\dim V_1, \dim V_2\} = 4$. Andererseits ist die Dimension von $V_1 + V_2$ nach oben beschränkt durch die Dimension des übergeordneten Vektorraums $\mathbb{R}^7$ und die Summe der Dimensionen der beiden Unterräume: Letzteres gilt, da die Basis der Linearen Hülle der Summe der Vektorräume nicht mehr Elemente enthalten kann, als in den Basen der zwei Untervektorräumen schon enthalten sind. Formal ausgedrückt: Sei $\mathcal{B}_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$ eine Basis von V_1 und $\mathcal{B}_2 = \{b_1, \ldots, b_s\}$ eine Basis von V_2, dann ist $V_1 + V_2 = \operatorname{Span}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$. Also wird $V_1 + V_2$ von höchstens $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = r + s$ Vektoren aufgespannt, d.h. $\dim(V_1 + V_2) \leq \dim V_1 + \dim V_2 = 6$. Somit wissen wir, dass $\dim(V_1 + V_2) \in \{4, 5, 6\}$ liegt.

Aus der Dimensionsformel für Unterräume

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

folgt die Dimension von $V_1 \cap V_2$, nämlich

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 6 - \dim(V_1 + V_2).$$

Somit erhalten wir folgende Möglichkeiten für die Paare (p, q) mit $p = \dim(V_1 + V_2)$ und $q = \dim(V_1 \cap V_2)$:

$$(p, q) \in \{(4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$$

7. Sei $V := \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten. Sei $V_1 := \{f \in V \mid f(-x) = f(x)\}$ der Unterraum der geraden Funktionen und $V_2 := \{f \in V \mid f(-x) = -f(x)\}$ derjenige der ungeraden Funktionen. Zeigen Sie, dass $V_1 \oplus V_2 = V$ ist.

Lösung
Wir haben Basen $\mathcal{B}_1 := \{1, x^2, x^4, x^6, \ldots\}$ von V_1 und $\mathcal{B}_2 := \{x, x^3, x^5, x^7, \ldots\}$ von V_2. Da $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$ den ganzen Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]$ erzeugt, gilt $V_1 + V_2 = V$. Es bleibt zu zeigen, dass $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ist. Sei also $f \in V_1 \cap V_2$ sowohl eine gerade als auch eine ungerade Funktion. Es gilt also $f(x) = f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $f \equiv 0$ die Null-Funktion, wie gewünscht. Wir erhalten $V_1 \oplus V_2 = V$.