Serie 3

1. Sei V ein Vektorraum. Man nennt eine lineare Abbildung $P : V \to V$ eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt. Zeigen Sie:

a) Der Kern und das Bild einer Projektion sind komplementär, also $\text{Kern}(P) \oplus \text{Bild}(P) = V$.

Lösung

Sei $P : V \to V$ eine Projektion mit $\text{Kern}(P) := W_1$ und $\text{Bild}(P) := W_2$. Wir müssen zeigen, dass W_1 und W_2 komplementär sind. Wir zeigen zunächst, dass $V = W_1 + W_2$. Sei $v \in V$. Dann gilt $P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$, also $v - P(v) \in \text{Kern}(P) = W_1$. Natürlich gilt $P(v) \in \text{Bild}(P) = W_2$, also ist $v = v - P(v) + P(v)$ die gesuchte Zerlegung. Es bleibt also zu zeigen, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist. Sei dazu $v \in W_1 \cap W_2$. Da v insbesondere im Bild von P liegt, gibt es ein $w \in V$, so dass $P(w) = v$. Wenden wir P auf beiden Seiten der Gleichung an so folgt $P^2(w) = P(w) = P(v)$. Da aber v ebenfalls im Kern von P ist, haben wir $0 = P(v) = P(w) = v$.

b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ komplementäre Unterräume. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \to V$ mit $\text{Kern}(P) = W_1$ und $\text{Bild}(P) = W_2$.

Lösung

Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei komplementäre Untervektorräume von V, also $V = W_1 \oplus W_2$. Wähle eine (geordnete) Basis $(u_1, u_2, \ldots)$ von W_1 und eine Basis $(v_1, v_2, \ldots)$ von W_2. Dann ist $(u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots)$ eine Basis von V. Definiere nun $P(u_i) = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ und $P(v_j) = v_j$ für alle $j = 1, 2, \ldots$. Man kann nun prüfen, dass P die gewünschten Bedingungen erfüllt.

Eindeutigkeit: Wir zeigen, dass eine Projektion durch ihren Kern und ihr Bild eindeutig bestimmt ist. Seien wie oben $\text{Kern}(P) := W_1$ und $\text{Bild}(P) := W_2$. Wie in Teilaufgabe a) gezeigt wurde, gilt $V = W_1 \oplus W_2$. Sei nun P' eine weitere Projektion mit gleichem Kern und Bild. Trivialerweise gilt $P = P'$ auf dem Kern, also auf W_1. Sei nun $v \in W_2$, d.h. es gibt $w, w' \in V$, so dass $P(w) = v$ und $P'(w') = v$. Es folgt

$$P(v) - P'(v) = P(P(w)) - P'(P'(w')) = P(w) - P'(w') = v - v = 0.$$

Dies bedeutet, dass P und P' auf W_2 übereinstimmen, also auch auf $V = W_1 \oplus W_2$.

c) Das Bild von $P (\neq 0)$ ist ein Eigenraum von P.

Lösung

Sei $v \in \text{Bild}(P)$, also $v = P(w)$ für ein $w \in V$. Mit $P^2 = P$ erhalten wir

$$P(v) = P(P(w)) = P(w) = v.$$

Also ist v ein Eigenvektor von P zum Eigenwert 1. Somit haben wir $\text{Bild}(P) \subset \text{Eig}_{1,P}$, wobei $\text{Eig}_{1,P}$ den Eigenraum von P zum Eigenwert 1 bezeichnet. Auf der anderen Seite gilt für alle $v \in \text{Eig}_{1,P}$, dass $P(v) = v$ ist, also auch $v \in \text{Bild}(P)$. Dies gibt $\text{Bild}(P) = \text{Eig}_{1,P}$ wie gewünscht.

d) Das Spektrum von P ist entweder $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ oder $\{0,1\}$ (in welchem Fall ist das Spektrum leer? gleich $\{0\}$? gleich $\{1\}$?)
Lösung
Sei t ein Eigenwert von P und v ein $t-$Eigenvektor, also $P(v) = tv$. Gemeinsam mit $P^2 = P$ folgt daraus

$$tv = P(v) = P(P(v)) = P(tv) = tP(v) = t^2 v.$$

Weil der Vektor v nicht 0 sein kann (Eigenvektoren sind immer $\neq 0$!), folgt $t^2 - t = 0$. Somit ist $t \in \{0,1\}$. Das Spektrum ist eine Teilmenge von $\{0,1\}$, d.h. eine der Mengen $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$.
Falls das Spektrum leer ist, müssen sowohl der Kern von P (0-Eigenraum) als auch das Bild von P (1-Eigenraum, wie in (c) gezeigt) Nullräume sein. Dann ist ganz V der Nullraum.
Wir nehmen nun an, dass $V \neq \{0_V\}$ ist.
Falls das Spektrum $\{0\}$ ist, folgt aus (c), dass das Bild von P der Nullraum ist. Dies bedeutet $P = 0$.
Falls das Spektrum $\{1\}$ ist, folgt aus (a) dass der Kern von P null und das Bild von P ganz V ist. Aus (c) folgt, dass $P(v) = v$ für alle $v \in V$. Das heisst $P = 1 = \mathrm{Id}_V$.

2. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$ für alle $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.
Lösung
Da die Spur definiert ist als $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ und die Transponierte ${}^tA$ dieselben Diagonaleinträge hat wie A, gilt tatsächlich $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.

b) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ für alle $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.
Lösung
Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel kann man $A = B = 1_n$ wählen:

$$\mathrm{Tr}(1_n 1_n) = \mathrm{Tr}(1_n) = n \neq n^2 = \mathrm{Tr}(1_n)\,\mathrm{Tr}(1_n).$$

c) $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)^{-1}$ für alle $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.
Lösung
Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Inverse ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und hat Spur $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{3} = \mathrm{Tr}(A)^{-1}$.

d) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale. Dann kann man die Spur von allen Potenzen A^r mit $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ unabhängig von den nicht-diagonalen Einträgen von A berechnen.
Lösung
Die Aussage ist wahr. Das Produkt von zwei oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ist wiederum eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale. Somit erhalten wir $\mathrm{Tr}(A^r) = n$ für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

3. Beweisen oder wiederlegen Sie, ob folgende Paare von Matrizen über dem angegebenen Körper K ähnlich sind:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$

Lösung

Wir zeigen, dass A_1 und A_2 über $\mathbb{C}$ nicht ähnlich sein können. Wir nehmen per Widerspruch an, dass A_1 und A_2 ähnlich sind über $\mathbb{C}$. Also existiert ein invertierbares $X \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ mit $A_1 = XA_2X^{-1}$. Mit der Eigenschaft der Spur, dass $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ gilt, folgt

$$\mathrm{Tr}(A_1) = \mathrm{Tr}(XA_2X^{-1}) = \mathrm{Tr}(X^{-1}XA_2) = \mathrm{Tr}(A_2).$$

Für die gegebenen Matrizen gilt aber

$$\mathrm{Tr}(A_1) = 1 + 4 + (-2) = 3 \neq 2 = \mathrm{Tr}(A_2),$$

was einen Widerspruch gibt. Folglich sind A_1 und A_2 über $\mathbb{C}$ nicht ähnlich zueinander.

Fazit: Die gleiche Spur zu haben ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für zwei Matrizen um ähnlich zu sein.

b) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$

Lösung

Die gegebenen Matrizen sind über $\mathbb{C}$ nicht ähnlich zueinander. Angenommen, sie wären es, dann hätten wir ein $X \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ mit

$$B_2 = XB_1X^{-1} = X1_3X^{-1} = XX^{-1} = 1_3,$$

was ein Widerspruch ist.

Fazit: Die Einheitsmatrix ist nur ähnlich zu sich selbst. Ausserdem sehen wir hier ein Beispiel, wo beide Matrizen dieselbe Spur und Determinante haben, aber dennoch nicht ähnlich zueinander sind.

c) $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$

Lösung

Wir zeigen, dass C_1 und C_2 über $\mathbb{R}$ nicht ähnlich sein können. Nehmen wir per Widerspruch an, sie seien über $\mathbb{R}$ ähnlich zueinander. Es existiert also ein invertierbares $Y \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $C_1 = YC_2Y^{-1}$. Mit der Eigenschaft der Determinanten, dass $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ sowie $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ gilt, folgt

$$\det(C_1) = \det(YC_2Y^{-1}) = \det(Y)\det(C_2)\det(Y)^{-1} = \det(C_2).$$

Für die gegebenen Matrizen gilt aber

$$\det(C_1) = (-8) + 0 + (-9) - 0 - (-6) - (-12) = 1 \neq 20 = \det(C_2),$$

was den gewünschten Widerspruch gibt. Folglich sind C_1 und C_2 über $\mathbb{R}$ nicht ähnlich zueinander. Beachte, dass dieselbe Argumentation auch für $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}$ funktioniert.
Fazit: Die gleiche Determinante zu haben ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingungen für zwei Matrizen um ähnlich zu sein.

d) $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

Lösung
Es gilt $D_1 = XD_2X^{-1}$ mit $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ invertierbar. Also sind D_1 und D_2 über $\mathbb{Q}$ ähnlich zueinander.

4. Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung
Wir bemerken zuerst folgende 3 Fakten über ähnliche Matrizen. Dabei bezeichne $\sim$ die Ähnlichkeitsrelation.

(a) $1_n \sim A \Rightarrow A = 1_n$
Beweis: $1_n \sim A \Rightarrow \exists\ X \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ invertierbar mit $A = X1_nX^{-1} = 1_n$

(b) $A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$
Beweis: $A \sim B \Rightarrow \exists\ X \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ invertierbar mit $A = XBX^{-1}$
$\Rightarrow \exists\ X \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ invertierbar mit $A^2 = (XBX^{-1})(XBX^{-1}) = XB^2X^{-1}$
$\Rightarrow A^2 \sim B^2$

(c) $A \sim B \Rightarrow$ Es gibt ein $v \neq 0$ mit $Av = v$ genau dann, wenn es ein $w \neq 0$ mit $Bw = w$ gibt.
Beweis: Sei $A \sim B$. Sei $X \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ invertierbar mit $B = XAX^{-1}$. Sei $v \neq 0$ so, dass $Av = v$ gilt. Dann erfüllt $w = Xv$ die Gleichung $Bw = XAX^{-1}Xv = XAv = Xv = w$. Ausserdem ist $w = Xv \neq 0$, da X invertierbar und $v \neq 0$ ist. Die andere Richtung folgt mit derselben Argumentation mit X^{-1} anstatt X.

Wir kommen nun zur eigentlichen Aufgabe:
Nach Fakt 1 ist $A_5 = 1_2$ zu keiner anderen Matrix A_i ähnlich.
Durch Konjugieren mit der Vertauschungsmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sieht man, dass A_1 ähnlich zu A_4, und A_2 ähnlich zu A_3 ist. Weiter sind A_2^2 und A_3^2 und A_7^2 gleich der Nullmatrix, die übrigen A_i^2 aber nicht. Nach Fakt 2 kann in der Äquivalenzklasse (bzgs. der Ähnlichkeitsrelation) von A_2 und A_3 also höchstens noch A_7 liegen. Durch Konjugation von A_7 mit der Matrix $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$U^{-1}A_7U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2\,.$$

Also sind A_2 und A_7 zueinander ähnlich.
[Bemerkung zur Wahl von U: Angenommen so ein U existiert. Wegen $\mathrm{Kern}(f_{A_2}) = \langle \binom{1}{0} \rangle$ und $U^{-1}A_7U = A_2$ wissen wir, dass auch $\mathrm{Kern}(f_{A_7U}) = \langle \binom{1}{0} \rangle$ ist. Es folgt, dass $U\binom{1}{0} \in \mathrm{Kern}(f_{A_7}) = \langle \binom{1}{1} \rangle$ ist, woraus wir schliessen, dass U von der Form $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ ist. Hier sind a und b erst mal einfach so, dass U invertierbar ist. Durch rechnen sieht man, dass

$$UA_2U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} b & -a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b} A_7$$

ist. Dies gibt die Bedingung $a - b = 1$. Also zum Beispiel $a = 0$ und $b = -1$ wie oben, was zum Gewünschten führt.]
Wegen $\mathrm{Kern}(f_{A_6}) = \langle \binom{-1}{1} \rangle$ probieren wir Konjugation von A_6 mit der Matrix $V := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, und erhalten

$$V^{-1}A_6V = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_8\,.$$

Also ist A_6 ähnlich zu A_8. Schliesslich existiert ein von Null verschiedener Vektor $v := \binom{1}{0}$ mit $A_1v = v$, aber kein von Null verschiedener Vektor $w \in K^2$ mit $A_8w = w$. Also sind A_1 und A_8 nicht ähnlich. Da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, folgt insgesamt, dass A_2, A_3 und A_7, beziehungsweise A_1 und A_4, beziehungsweise A_6 und A_8 ähnlich sind, aber keine weiteren Ähnlichkeiten der A_i existieren.

5. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei $V := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten von Grad kleiner gleich n. Berechnen Sie die Spur und die Determinante der folgenden Endomorphismen:

a) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben als $f(p) = p'$, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.
Lösung
Sei $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ die Standardbasis von V. Die Matrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist

$$\mathrm{Mat}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Spur 0. Somit ist $\mathrm{Tr}(f) = 0$, und $\det(f) = 0$.

b) Sei $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch $g(p) = 4p''' - 2p'' + 7p' + 2p$, wobei r Striche die r-te Ableitung bezeichnen.

Lösung
Die Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots, x^n)$ ist eine obere Dreiecksmatrix und hat als Diagonaleinträge überall eine 2 (wegen des Summanden $2p$ in der Definition von g). Somit gilt

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B})) = (n+1) \cdot 2 = 2n + 2,$$

und $\det(g) = \det(\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B})) = 2^{n+1}$. Beachte, dass die Ableitungen in dieser Aufgabe irrelevant sind, da sie den Grad des Polynoms jeweils um eins reduzieren und dadurch keine Einträge auf der Diagonalen geben können.

c) Sei $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch $h(p) = xp' - p$.
Lösung
Wir arbeiten wiederum mit der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$. Das Element x^r der Basis (mit $0 \leq r \leq n$) wird durch h abgebildet auf $rx^r - x^r = (r-1)x^r$. Also gilt

$$\mathrm{Tr}(h) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}(h, \mathcal{B}, \mathcal{B})) = -1 + 0 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - 1.$$

Falls $n = 0$ ist, erhalten wir $\det(h) = -1$. Für $n \geq 1$ ist $\det(h) = 0$.

6. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, $V = \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Definiere

$$W := \{v \in V \mid \exists\, r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ mit } (A - \lambda 1_n)^r v = 0\} \subset V.$$

Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$ ist.

Sei $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, die mit A kommutiert. Zeigen Sie, dass W ein für B invarianter Unterraum von V ist.
Bemerkung: W heisst Hauptraum zum Eigenwert λ (engl: generalized eigenspace) und die Elemente $v \in W$ heissen Hauptvektoren (engl: generalized eigenvectors). Diese Begriffe werden später in der Vorlesung eine wichtige Rolle beim Bestimmen der Jordanschen Normalform spielen.

Lösung
Als Erstes müssen wir zeigen, dass W ein Untervektorraum ist: Zunächst einmal gilt $0_V \in W$. Wir müssen also noch zeigen, dass für alle $s_1, s_2 \in K$ und alle $v_1, v_2 \in W$ auch das Element $s_1 v_1 + s_2 v_2$ in W liegt. Per Definition von W existieren $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $(A - \lambda 1)^{r_1} v_1 = 0$ und $(A - \lambda 1)^{r_2} v_2 = 0$. Somit gilt

$$\begin{aligned}(A - \lambda 1)^{r_1 + r_2}(s_1 v_1 + s_2 v_2) &= s_1 (A - \lambda 1)^{r_2} (A - \lambda 1)^{r_1} v_1 + s_2 (A - \lambda 1)^{r_1} (A - \lambda 1)^{r_2} v_2 \\ &= s_1 (A - \lambda 1)^{r_2} 0 + s_2 (A - \lambda 1)^{r_1} 0 = 0.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass W ein Untervektorraum von V ist. Es bleibt zu zeigen, dass W invariant ist unter B, also $B(W) \subset W$ gilt. Sei $v \in W$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass Bv ebenfalls in W liegt. Sei $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ so, dass $(A - \lambda 1)^r v = 0$ ist. Da B sowohl mit A (nach Annahme) als auch mit der Identität 1 kommutiert, haben wir

$$(A - \lambda 1)^r B v = (A - \lambda 1)^{r-1} B (A - \lambda 1) v = \ldots = B (A - \lambda 1)^r v = B0 = 0.$$

Folglich gilt $Bv \in W$ wie gewünscht, was den Beweis beendet.

7. Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ ähnliche Matrizen. Sei $X \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix mit $B = XAX^{-1}$. Sei $W \subset \mathrm{K}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass W genau dann invariant unter A ist, wenn $X(W)$ invariant unter B ist.

Lösung

$\Rightarrow$: Wir nehmen an, dass W invariant unter A ist, also $A(W) \subset W$ ist. Dann gilt

$$B(X(W)) = XAX^{-1}(X(W)) = X \underbrace{A(W)}_{\subset W} \subset X(W).$$

Also ist $X(W)$ invariant unter B wie gewünscht.

$\Leftarrow$: Wir nehmen nun an, dass $X(W)$ invariant unter B ist, also $B(X(W)) \subset X(W))$ ist. Dann gilt

$$A(W) = X^{-1} \underbrace{BX(W)}_{\subset X(W))} \subset X^{-1}X(W) = W.$$

Somit erhalten wir die zweite Richtung der Aussage.