

Serie 4

1. Es sei $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2 -Matrix. Finde Bedingungen an a, b, c, d , so dass die Matrix D
- 2 verschiedene,
 - genau einen oder
 - keinen reellen Eigenwert hat.

Lösung

Wir berechnen das charakteristische Polynom von D allgemein und erhalten

$$\begin{aligned} \text{char}_D(\lambda) &= \det(\lambda \text{Id}_V - D) = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc). \end{aligned}$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in λ und hat somit die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}.$$

Es ist bekannt, dass der Term in der Wurzel bestimmt, wieviele reelle Lösungen es gibt. Wir können ihn noch etwas umformen zu

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc.$$

Falls dieser Ausdruck positiv ist, so hat D zwei verschiedene reelle Eigenwerte, wenn er verschwindet gibts einen doppelten reellen Eigenwert und wenn er negativ ist gar keinen (sondern 2 komplexe Eigenwerte).

2. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei A_α die reelle 4×4 -Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

Lösung

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom von A_α und setzen dann $\lambda = 0$ um zu sehen, ob die Determinante verschwindet oder nicht. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{char}_{A_\alpha}(\lambda) &= \det(\lambda \text{Id}_V - A_\alpha) \\ &= (\lambda - 1)^4 - \alpha^2(\lambda - 1)^2 \\ &= (\lambda - 1)^2((\lambda - 1)^2 - \alpha^2) \\ &= (1 - \lambda)^2(\lambda - 1 - \alpha)(\lambda - 1 + \alpha). \end{aligned}$$

Es gilt $\det A_\alpha = \text{char}_{A_\alpha}(0) = 1 - \alpha^2$. Deshalb ist A_α genau dann invertierbar, wenn $\alpha^2 \neq 1$ ist; also genau dann, wenn $\alpha \neq \pm 1$.

b) Berechne die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α .

Lösung

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind offensichtlich 1 (doppelte Nullstelle), $1 - \alpha$ und $1 + \alpha$. Also hat A_α die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 - \alpha$ und $\lambda_4 = 1 + \alpha$.

c) Berechne $\det A_\alpha$ und vergleiche die Zahl mit dem Produkt der Eigenwerte von A_α (inklusive Vielfachheiten).

Lösung

Wir haben $\det A_\alpha = 1 - \alpha^2$ bereits berechnet, und es ist genau das Produkt der Eigenwerte von A_α .

3. Bestimmen Sie die die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Endomorphismen. Was lässt sich über die algebraische und geometrische Vielfachheit sagen?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

Lösung

Die Eigenwerte kann man bei Dreiecksmatrizen direkt ablesen, es sind nämlich gerade die Diagonaleinträge:

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 4.$$

Da $\dim(V) = 3$ ist und wir 3 verschiedene Eigenwerte haben, ist die algebraische Vielfachheit jeweils 1. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist nach Proposition 4.3.10 der Kern von $\lambda \text{Id}_V - A$. Wir erhalten

$$\text{Eig}_{-1,f} = \text{Kern}(-\text{Id}_V - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Eig}_{2,f} = \text{Kern}(2\text{Id}_V - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und}$$

$$\text{Eig}_{4,f} = \text{Kern}(4\text{Id}_V - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10/3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da die Eigenräume jeweils von genau einem Vektor erzeugt werden, ist die geometrische Vielfachheit jeweils 1. Alternativ weiss man in diesem Fall die geometrische Vielfachheit auch bereits, weil sie immer grösser gleich 1 und kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit sein muss.

b) Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus und \mathcal{B} eine Basis von V , in der

$$\text{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } a_{16}, \dots, a_{66} \in \mathbb{R}.$$

Lösung

Wir benutzen Lemma 4.3.5 aus dem Skript. Von den Diagonaleinträgen können wir ablesen, dass f die Eigenwerte $-1, 0, 2$ hat und allenfalls noch einen weiteren, nämlich a_{66} . Mit Vielfachheiten sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 2 \text{ und } \lambda_6 = a_{66}.$$

Um die Eigenräume zu berechnen, machen wir folgende Fallunterscheidung:

i. $a_{66} \notin \{-1, 0, 2\}$: Wir haben die Eigenräume

$$\text{Eig}_{-1,f} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{Eig}_{0,f} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{Eig}_{2,f} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und der Eigenraum zum Eigenwert a_{66} hat Dimension 1.

ii. $a_{66} = -1$: Die Eigenräume $\text{Eig}_{0,f}$ und $\text{Eig}_{2,f}$ sind wie in Fall (i). Der (-1) -Eigenraum ist

$$\text{Eig}_{-1,f} = \begin{cases} \langle {}^t(0, 0, 0, 1, 0, 0) \rangle, & \text{falls } a_{46} \neq 0 \\ \langle {}^t(0, 0, 0, 1, 0, 0), {}^t(a_{16}, 3a_{26}, 3a_{36}, 0, a_{56}, -3) \rangle, & \text{falls } a_{46} = 0 \end{cases}$$

iii. $a_{66} = 0$: Die Eigenräume $\text{Eig}_{-1,f}$ und $\text{Eig}_{2,f}$ sind wie in Fall (i). Der 0- Eigenraum ist

$$\text{Eig}_{0,f} = \begin{cases} \langle {}^t(0, 1, 0, 0, 0, 0), {}^t(0, 0, 1, 0, 0, 0) \rangle, & \text{falls } a_{26} \neq 0 \text{ oder } a_{36} \neq 0 \\ \langle {}^t(0, 1, 0, 0, 0, 0), {}^t(0, 0, 1, 0, 0, 0), {}^t(a_{16}, 0, 0, 2a_{46}, -a_{56}, -2) \rangle, & \text{sonst} \end{cases}$$

iv. $a_{66} = 2$: Die Eigenräume $\text{Eig}_{-1,f}$ und $\text{Eig}_{0,f}$ sind wie in Fall (i). Der 2- Eigenraum ist

$$\text{Eig}_{2,f} = \begin{cases} \langle {}^t(1, 0, 0, 0, 0, 0), {}^t(0, 0, 0, 0, 1, 0) \rangle, & \text{falls } a_{16} \neq 0 \text{ oder } a_{56} \neq 0 \\ \langle {}^t(1, 0, 0, 0, 0, 0), {}^t(0, 0, 0, 0, 1, 0), {}^t(0, 3a_{26}, 3a_{36}, 2a_{46}, 0, 6) \rangle, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über \mathbb{Q} und überprüfen Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$\text{char}_A(t) = \det(t \text{Id}_2 - A) = (t - 1)(t - 4) + 2 = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3)$$

und damit die Eigenwerte 2 und 3. Die Eigenräume $E_{t,A}$ zum Eigenwert t sind

$$E_{2,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad E_{3,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da für jeden Eigenwert von A die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, ist A diagonalisierbar.

b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung

Die Matrix B hat das charakteristische Polynom

$$\text{char}_B(X) = X^3 - 5X^2 + 2X + 8 = (X - 4)(X - 2)(X + 1).$$

und damit die Eigenwerte $\{4, 2, -1\}$. Die Eigenräume sind

$$E_{4,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{2,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{-1,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da für jeden Eigenwert von B die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, ist B diagonalisierbar.

c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Lösung

Die Matrix C hat das charakteristische Polynom

$$\text{char}_C(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4 = (X - 1)(X + 1)(X - 2)^2.$$

und damit die Eigenwerte $\{1, -1, 2\}$. Die Eigenräume sind

$$E_{1,C} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{-1,C} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{2,C} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenwert 2 hat algebraische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit 1. Die Matrix C ist also nicht diagonalisierbar.

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{33}(\mathbb{C})$

Lösung

Notation: Eine andere Schreibweise für die Determinante einer Matrix sind vertikale Striche links und rechts der Matrix, also $\det(A) = |A|$.

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom von A :

$$\text{char}_A(X) = \det(X \text{Id}_V - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)((X-1)^2+1) \in \mathbb{C}[X].$$

Die Eigenwerte von A sind nun genau die Nullstellen von $\text{char}_A(X)$. Es gilt

$$\text{char}_A(X) = (X-1)(X^2-2X+2) = (X-1)(X-(1+i))(X-(1-i))$$

und somit sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1+i$ und $\lambda_3 = 1-i$ die Eigenwerte von A .

Nun bestimmen wir die zugehörigen Eigenvektoren. Für $\lambda_1 = 1$ haben wir

$$\text{Kern}(\text{Id}_V - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Der zugehörige Eigenraum wird somit vom Vektor $(0, 1, 1)^T$ aufgespannt.

Für $\lambda_2 = 1+i$ gilt

$$\text{Kern}((1+i)\text{Id}_V - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} it \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}$$

und der zugehörige Eigenraum wird somit vom Vektor $(i, 0, 1)^T$ aufgespannt.

Für $\lambda_3 = 1-i$ haben wir

$$\text{Kern}((1-i)\text{Id}_V - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -it \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Der zugehörige Eigenraum wird somit vom Vektor $(-i, 0, 1)^T$ aufgespannt.

b) $B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$

Lösung

Das charakteristische Polynom

$$\text{char}_{B_\varphi}(X) = \det(X \text{Id}_V - B_\varphi) = \begin{vmatrix} X - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & X - \cos \varphi \end{vmatrix} = X^2 - 2X \cos \varphi + 1 \in \mathbb{C}[X]$$

hat die Nullstellen $\cos \varphi + i \sin \varphi$ und $\cos \varphi - i \sin \varphi$. Daraus folgt, dass $\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und $\lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi$ die Eigenwerte von B sind.

Um die Eigenvektoren von B zu bestimmen, betrachten wir zuerst den Spezialfall $\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$. Dann ist $B = I$ (für $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) oder $B = -I$ (für $\varphi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) und die beiden Eigenwerte sind gleich. Offenbar ist der Eigenraum zum einzigen Eigenwert in diesem Fall ganz \mathbb{C}^2 . Sei jetzt also φ kein Vielfaches von π . Dann gilt:

$$\text{Kern}((\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{Id}_V - B_\varphi) = \text{Kern} \begin{pmatrix} i \sin \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & i \sin \varphi \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} it \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ wird also vom Vektor $(i, 1)^T$ erzeugt. Für den zweiten Eigenwert erhalten wir:

$$\text{Kern}((\cos \varphi - i \sin \varphi) \text{Id}_V - B_\varphi) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -i \sin \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -i \sin \varphi \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -it \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}.$$

und somit wird der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi$ vom Vektor $(-i, 1)^T$ erzeugt.

6. Zeigen Sie: Jedes Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$$

mit $n \geq 1$ ist charakteristisches Polynom einer Matrix in $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Hinweis: Betrachten Sie eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Skalaren in der letzten Zeile.

Bemerkung: Die so erhaltene Matrix A heisst *Begleitmatrix* des Polynoms P .

Lösung

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ \alpha'_0 & \alpha'_1 & \dots & & \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Wir berechnen nun das charakteristische Polynom $\text{char}_A(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_V - A)$ von A und wenden dabei den Entwicklungssatz von Laplace auf die letzte Zeile an:

$$\begin{aligned} \text{char}_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & -1 \\ -\alpha'_0 & -\alpha'_1 & \dots & & -\alpha'_{n-1} + \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1}(-\alpha'_0) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2}(-\alpha'_1) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + \dots \\ &\dots + (-1)^{n+(j+1)}(-\alpha'_j) \begin{vmatrix} A_j & 0 \\ 0 & B_j \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{2n}(-\alpha'_{n-1} + \lambda) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die beiden Blöcke $A_j \in M_{j,j}(\mathbb{K})$ und $B_j \in M_{(n-j-1),(n-j-1)}(\mathbb{K})$ die Gestalt

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ -1 & 0 & & \\ 0 & \dots & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

haben. Es gilt

$$\begin{vmatrix} A_j & 0 \\ 0 & B_j \end{vmatrix} = \det(A_j) \det(B_j) = \lambda^j (-1)^{n-j-1}$$

und daraus folgt, dass

$$\text{char}_A(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+(j+1)}(-\alpha'_j) \lambda^j (-1)^{n-j-1} + (-1)^{2n} \lambda^n = \sum_{j=0}^{n-1} -\alpha'_j \lambda^j + \lambda^n.$$

Wir definieren nun $\alpha'_j = -\alpha_j$. Damit hat die Matrix A genau das gewünschte charakteristische Polynom.

7. Sei V ein K -Vektorraum und $F, G \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie:

- a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ und $G(v) \neq 0$ ist, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ .

Lösung

Sei $v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von $F \circ G$, das heisst $F \circ G(v) = \lambda v$. Wir nehmen ausserdem an, dass $G(v) \neq 0$ ist. Dann gilt

$$G \circ F(G(v)) = G(F \circ G(v)) = G(\lambda v) = \lambda G(v).$$

Also ist $G(v)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von $G \circ F$.

- b) Ist V endlich dimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

Lösung

Sei λ ein Eigenwert von $F \circ G$ und sei v ein zugehöriger Eigenvektor. Wir haben in **a)** gesehen, dass, falls $G(v) \neq 0$ ist, λ auch ein Eigenwert von $G \circ F$ ist. Falls aber $G(v) = 0$ ist, so ist $\lambda = 0$, denn $\lambda v = F(G(v)) = F(0) = 0$. Wir müssen zeigen, dass in diesem Fall auch der Kern von $G \circ F$ nicht trivial ist.

1. Fall: Kern von F ist nicht trivial, also existiert ein $0 \neq w \in V$ mit $F(w) = 0$. Dann ist aber $G \circ F(w) = G(0) = 0$. Somit ist 0 ein Eigenwert von $G \circ F$.

2. Fall: Kern von F ist trivial, dann ist F ein Isomorphismus (V ist endlich dimensional). Also gilt für $w := F^{-1}(v)$, dass $G \circ F(w) = G \circ F(F^{-1}(v)) = G(v) = 0$ ist. Auch in diesem Fall ist 0 ein Eigenwert von $G \circ F$.

Somit ist jeder Eigenwert von $F \circ G$ auch ein Eigenwert von $G \circ F$. Genau gleich zeigt man, dass jeder Eigenwert von $G \circ F$ auch ein Eigenwert von $F \circ G$ ist.

- c) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu b) an, falls V nicht endlich dimensional ist.

Lösung

Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ der Vektorraum aller Folgen in \mathbb{R} . Definiere die Operatoren F und G wie folgt:

$$F : V \rightarrow V \text{ gegeben durch } F((a_1, a_2, a_3, \dots)) := (0, a_1, a_2, a_3, \dots),$$

$$G : V \rightarrow V \text{ gegeben durch } G((a_1, a_2, a_3, \dots)) := (a_2, a_3, \dots).$$

$G \circ F$ ist die Identität, hat also nur 1 als Eigenwert. Andererseits besitzt $F \circ G$ auch 0 als Eigenwert, da $F \circ G(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$ ist.