Serie 5

1. Der Satz von Cayley-Hamilton besagt Folgendes:
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\mathrm{char}_f(t)$. Dann gilt $\mathrm{char}_f(f) = 0$.

a) Beweisen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für diagonalisierbare Endomorphismen.

Lösung
Sei $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ diagonalisierbar. Nach Lemma 4.3.9 gibt es eine Basis $\mathcal{B}$, so dass $\mathrm{Mat}\,(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ diagonal ist. Sei $A := \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom von f ist per Definition

$$\begin{aligned}\mathrm{char}_f(t) &= \det(t\,\mathrm{Id}_V - f) = \det(t\,\mathrm{Id}_V - A) = \det\left(\mathrm{diag}(t - a_1, t - a_2, \ldots, t - a_n)\right)\\ &= (t - a_1)(t - a_2)\cdots(t - a_n) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 t^0, \qquad (1)\end{aligned}$$

für gewisse $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$. Werten wir dieses Polynom in f bzw. in A aus, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{char}_f(f) &= A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 1_n\\ &= \mathrm{diag}(a_1^n + c_{n-1}a_1^{n-1} + \ldots + c_1 a_1 + c_0,\ \ldots\ , a_n^n + c_{n-1}a_n^{n-1} + \ldots + c_1 a_n + c_0)\\ &= \mathrm{diag}(\mathrm{char}_f(a_1), \mathrm{char}_f(a_2), \ldots, \mathrm{char}_f(a_n)) = 0.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus (1), da $\mathrm{char}_f(a_i) = 0$ gilt für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Eine Matrix $N \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{C})$ heisst *nilpotent*, falls es ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gibt, sodass $N^k = 0$ ist. Zeigen Sie, dass eine Matrix $N \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ genau dann nilpotent ist, wenn 0 der einzige Eigenwert von N ist (über $\mathbb{C}$).

Lösung
Sei $N \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix und sei $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ so, dass $N^k = 0$ ist. Wir nehmen nun an, dass ein Eigenwert $\lambda \neq 0$ von N existiert und wählen einen dazugehörigen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt per Definition, dass $Nv = \lambda v$ ist. Wir zeigen nun induktiv, dass für alle $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ auch $N^l v = \lambda^l v$ gilt. Die Induktionsverankerung steht bereits da. Wir nehmen also an, dass $N^{l-1}v = \lambda^{l-1}v$ gilt. Daraus folgt

$$N^l v = N\left(N^{l-1}v\right) = N\left(\lambda^{l-1}v\right) = \lambda^{l-1}(Nv) = \lambda^l v.$$

Insbesondere haben wir gezeigt, dass $0 = N^k v = \lambda^k v$. Da λ nach Annahme jedoch nicht null ist, folgt daraus, dass $v = 0$ ist. Dies ist ein Widerspruch, denn Eigenvektoren dürfen per Definition nicht null sein. Somit haben wir gezeigt, dass N nur den Eigenwert 0 hat.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass die Matrix $N \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{C})$ nur den Eigenwert 0 hat. Äquivalent dazu können wir sagen, dass das charakteristische

Polynom $\mathrm{char}_N(x) = x^n$ ist. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt jedoch $\mathrm{char}_N(N) = 0$, also in unserem Fall $N^n = 0$. Somit haben wir gezeigt, dass die Matrix N nilpotent ist.

2. a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V = \mathbb{K}^{2n}$ für ein $n \in Z_{\geq 1}$. Wir definieren eine Funktion

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

durch

$$b(v,w) := \sum_{i=1}^{n} (v_{2i-1}w_{2i} - v_{2i}w_{2i-1}) = v_1w_2 - v_2w_1 + \ldots + v_{2n-1}w_{2n} - v_{2n}w_{2n-1},$$

für alle $v = (v_i)_{1\leq i\leq 2n}$ und $w = (w_i)_{1\leq i \leq 2n}$.
Zeigen Sie, dass b eine Bilinearform auf V ist.
Ist b symmetrisch?
Ist b alternierend (also $b(v,v) = 0$ für alle $v \in V$)?
Lösung
Für alle $v, v', w, w' \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} b(\lambda v + v', w) &= \sum_{i=1}^{n} \left((\lambda v_{2i-1} + v'_{2i-1})w_{2i} - (\lambda v_{2i} + v'_{2i})w_{2i-1} \right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} (v_{2i-1}w_{2i} - v_{2i}w_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \left(v'_{2i}w_{2i-1} - v'_{2i-1}w_{2i} \right) \\ &= \lambda b(v,w) + b(v',w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b(v, \lambda w + w') &= \sum_{i=1}^{n} \left(v_{2i-1}(\lambda w_{2i} + w'_{2i}) - v_{2i}(\lambda w_{2i-1} + w'_{2i-1}) \right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} (v_{2i-1}w_{2i} - v_{2i}w_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \left(v_{2i}w'_{2i-1} - v_{2i-1}w'_{2i} \right) \\ &= \lambda b(v,w) + b(v,w') \end{aligned}$$

Dies beweist, dass b eine Bilinearform auf V ist.
Die Bilinearform b erfüllt für alle $v, w \in V$:

$$b(v,w) = \sum_{i=1}^{n} (v_{2i-1}w_{2i} - v_{2i}w_{2i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} (w_{2i-1}v_{2i} - w_{2i}v_{2i-1}) = -b(w,v).$$

Für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt beispielsweise: $b(v,w) = -3 \neq 3 = b(w,v)$. Also ist b nicht symmetrisch.
Die Bilinearform ist alternierend, da $b(v,v) = 0$ gilt für alle $v \in V$.

b) Prüfen Sie nach, dass die Funktion

$$b : M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA \cdot B)$$

eine positive Bilinearform auf den $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_{n,n}(\mathbb{R})$ definiert.

Lösung

Mit Linearität der Transponierten und der Spur erhalten wir für alle $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b(\lambda A_1 + A_2, B) &= \mathrm{Tr}\left({}^t(\lambda A_1 + A_2)B\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(\lambda^t A_1 +^t A_2\right) B\right) = \mathrm{Tr}\left(\lambda^t A_1 B +^t A_2 B\right) \\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}\left({}^tA_1 B\right) + \mathrm{Tr}\left({}^tA_2 B\right) = \lambda b(A_1, B) + b(A_2, B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b(A, \lambda B_1 + B_2) &= \mathrm{Tr}\left({}^tA(\lambda B_1 + B_2)\right) = \mathrm{Tr}\left(\lambda\, {}^tAB_1 +^t AB_2\right) = \lambda\,\mathrm{Tr}\left({}^tAB_1\right) + \mathrm{Tr}\left({}^tAB_2\right) \\ &= \lambda b(A, B_1) + b(A, B_2). \end{aligned}$$

Also ist b eine Bilinearform. Wir überprüfen Positivität wie folgt:
Zum einen müssen wir Symmetrie zeigen. Wir haben

$$b(B, A) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tBA)) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = b(A, B) \quad \text{für alle } A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R}).$$

Ausserdem gilt für alle $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$:

$$b(A, A) = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{i=1}^{n} \left({}^tAA\right)_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} ({}^tA)_{ij} A_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}^2 \geq 0.$$

Dies beendet den Beweis.

3. a) (Parallelogrammidentität)

Sei $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum. Zeigen Sie

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2\left(||v||^2 + ||w||^2\right) \text{ für alle } v, w \in V.$$

Lösung

Wir haben für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} ||v + w||^2 + ||v - w||^2 &= \langle v + w, v + w\rangle + \langle v - w, v - w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - 2\langle v, w\rangle \\ &= 2||v||^2 + 2||w||^2. \end{aligned}$$

b) (Polarisationsformel)

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammidentität gilt. Zeigen Sie, dass

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{2}\left(||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert, das die gegebene Norm induziert.

Lösung

Wir überprüfen, dass alle definierenden Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt sind:

i. $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$ für alle $v,w \in V$ gilt direkt nach der Definition.

ii. $\langle v,v\rangle = \frac{1}{2}\left(||2v||^2 - 2||v||^2\right) = ||v||^2$ ist immer ≥ 0; und $= 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist. (Hier benutzen wir die Eigenschaften einer Norm.)

iii. Wir müssen noch die Linearität zeigen. Da wir nach (i) Symmetrie haben, genügt es, Linearität im ersten Argument zu zeigen, also $\langle v_1+v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$ und $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$ für alle $v, v_1, v_2, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit der Parallelidentität erhalten wir

$$||v_1+v_2+w||^2 + ||v_1+v_2-w||^2 = 2\left(||v_1+v_2||^2 + ||w||^2\right) \tag{2}$$
$$||v_2+w+v_1||^2 + ||v_2+w-v_1||^2 = 2\left(||v_2+w||^2 + ||v_1||^2\right) \tag{3}$$
$$||v_1-w+v_2||^2 + ||v_1-w-v_2||^2 = 2\left(||v_1-w||^2 + ||v_2||^2\right) \tag{4}$$

Mit (1) + (2) - (3) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2||v_1+v_2+w||^2 &= 2\left(||v_1+v_2||^2 + ||w||^2 + ||v_2+w||^2 + ||v_1||^2 - ||v_1-w||^2 - ||v_2||^2\right) \\ &= 2\left(||v_1+v_2||^2 + ||v_1+w||^2 + ||v_2+w||^2 - ||v_1||^2 - ||v_2||^2 - ||w||^2\right), \end{aligned}$$

wobei wir wiederum die Parallelidentität, nämlich $||v_1-w||^2 = 2||v_1||^2 + 2||w||^2 - ||v_1+w||^2$, benutzt haben. Daraus folgt nun wie gewünscht

$$\begin{aligned} \langle v_1+v_2, w\rangle &= \frac{1}{2}\left(||v_1+v_2+w||^2 - ||v_1+v_2||^2 - ||w||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(||v_1+w||^2 - ||v_1||^2 - ||w||^2 + ||v_2+w||^2 - ||v_2||^2 - ||w||^2\right) \\ &= \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle. \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$ für alle $v,w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
Zunächst wissen wir, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt $\langle nv, w\rangle = \langle v + \ldots + v, w\rangle = \langle v,w\rangle + \ldots + \langle v,w\rangle = n\langle v,w\rangle$.
Für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ erhalten wir

$$n\langle x,y\rangle = n\langle m\frac{1}{m}x, y\rangle = m\langle \frac{n}{m}x, y\rangle$$

und somit $\langle \frac{n}{m}x, y\rangle = \frac{n}{m}\langle x,y\rangle$. Die Aussage gilt somit für alle rationalen Zahlen. Da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen, sich also jede relle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ durch eine rationale Zahl $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ approximieren lässt, folgt das Gewünschte.

Wir müssen noch prüfen, dass dieses Skalarprodukt tatsächlich die gegebene Norm induziert. Wir haben

$$\langle v,v\rangle = \frac{1}{2}\left(4||v||^2 - ||v||^2 - ||v||^2\right) = ||v||^2.$$

Also ist $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$, was den Beweis beendet.

4. Sei $V := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ der Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$. Prüfen Sie, dass

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.
Zeigen Sie ausserdem, dass die Menge $\{c_n, s_m \mid n \geq 0, m \geq 1\}$, wobei

$$c_0(x) := 1 \quad , \quad c_n(x) := \sqrt{2}\cos(nx) \text{ für } n \geq 1 \quad \text{und} \quad s_m(x) := \sqrt{2}\sin(mx) \text{ für } m \geq 1$$

eine orthonormale Teilmenge von V ist.

Lösung
Zur Überprüfung des Skalarprodukts:

(a) Symmetrie gilt, da $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ ist.

(b) Linearität folgt aus der Linearität des Integrals.

(c) $\langle f, f\rangle \geq 0$ gilt, da ein Integral mit positivem stetigem Integrand immer positiv ist. Genauer haben wir die folgende Abschätzung:

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \geq \frac{1}{2\pi}\min_{x\in[0,2\pi]} f(x)^2 \cdot \int_0^{2\pi} 1\ dx = \min_{x\in[0,2\pi]} f(x)^2 \geq 0.$$

(d) $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$: Die Implikation von rechts nach links ist klar. Für die andere Implikation, nehmen wir per Widerspruch an, es gäbe ein $x \in [0, 2\pi]$ mit $|f(x)| \geq \epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine Umgebung von x in $[0, 2\pi]$, auf der f grösser gleich $\epsilon/2$ ist, also es existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$ gilt: $|f(y)| \geq \epsilon/2$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx &= \underbrace{\int_0^{x-\delta} f(x)^2 dx}_{\geq 0} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)^2 dx + \underbrace{\int_{x+\delta}^{2\pi} f(x)^2 dx}_{\geq 0} \\ &\geq 2\delta\frac{\epsilon^2}{4} = \frac{\delta\epsilon^2}{2} > 0,\end{aligned}$$

was den gewünschten Widerspruch ergibt.

Wir prüfen nun die Orthonormalität:
Da Kosinus und Sinus 2π- periodisch sind, sieht man, dass die Funktion $c_0 = 1$ orthogonal zu allen anderen ist. Ausserdem ist sie trivialerweise normiert.
Die übrigen Orthonormalitätsrelationen überprüfen wir mit Hilfe von Additionstheoremen wie folgt. Für alle $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\langle c_n, c_m\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m} + \frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\ dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2nx)dx = 1 + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{2\pi} = 1 & \text{für } n = m\end{cases}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle s_n, s_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{für } n \neq m \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\ dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2nx)dx = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{2\pi} = 1 \quad \text{für } n = m \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle s_n, c_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos((n-m)x)}{n-m} + \frac{-\cos((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{für } n \neq m \\ 0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2nx)dx = 0 \quad \text{für } n = m \end{cases}
\end{aligned}
$$

5. Seien f_1, f_2 und g stetige reell-wertige Funktionen auf einem gegebenen Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$). Sei zudem $g \geq 0$. Zeigen Sie die folgende Ungleichung:

$$
\left| \int_a^b f_1(x)f_2(x)g(x)dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b f_1(x)^2 g(x)dx\right)\left(\int_a^b f_2(x)^2 g(x)dx\right).
$$

Lösung
Die Idee ist es, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für positive Bilinearformen anzuwenden. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$
V := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}
$$

und definieren darauf die Bilinearform

$$
b(f_1, f_2) := \int_a^b f_1(x)f_2(x)g(x)dx.
$$

Die Bilinearität der Funktion b folgt aus der Linearität des Integrals. Somit ist b tatsächlich eine Bilinearform. Wir müssen noch prüfen, dass b positiv ist: Für alle $f \in V$ gilt

$$
b(f, f) = \int_a^b f(x)^2 g(x)dx \geq 0,
$$

da der Integrand nicht-negativ ist. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung besagt, dass

$$
|b(v, w)|^2 \leq b(v, v)b(w, w) \quad \text{für alle } v, w \in V.
$$

Für $f_1, f_2 \in V$ erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_1(x)f_2(x)g(x)dx \right|^2 &= |b(f_1, f_2)|^2 \leq b(f_1, f_1)\ b(f_2, f_2) \\
&= \left(\int_a^b f_1(x)^2 g(x)dx\right)\left(\int_a^b f_2(x)^2 g(x)dx\right).
\end{aligned}
$$

6. Betrachten Sie den Euklidischen Raum $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um aus den folgenden gegebenen geordneten Basen geordnete orthonormale Basen zu berechnen:

a) $\left(\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}\right)$

Lösung

Wir wenden den Gram-Schmidt Algorithmus auf die geordnete Basis

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}\right)$$

an:

$$w_1 := \frac{1}{||v_1||}v_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$w_2' := v_2 - \langle w_1, v_2\rangle w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{30}}w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-5\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$w_2 := \frac{1}{||w_2'||}w_2' = \frac{10}{\sqrt{170}}w_2' = \frac{1}{\sqrt{170}}\begin{pmatrix}-5\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$w_3' := v_3 - \langle w_1, v_3\rangle w_1 - \langle w_2, v_3\rangle w_2 = \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix} - 0\cdot w_1 - \frac{-80}{\sqrt{170}}w_2$$

$$= \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix} + \frac{8}{17}\begin{pmatrix}-5\\8\\-9\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}11\\-55\\-55\end{pmatrix} = \frac{11}{17}\begin{pmatrix}1\\-5\\-5\end{pmatrix}$$

$$w_3 := \frac{1}{||w_3'||}w_3' = \frac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}1\\-5\\-5\end{pmatrix}$$

(w_1, w_2, w_3) ist die gewünschte geordnete Orthonormalbasis.

b) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$

Lösung

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir berechnen

$$w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle w_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{||w_2'||} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_3' = v_3 - \langle w_1, v_3 \rangle w_1 - \langle w_2, v_3 \rangle w_2 = \frac{6}{11} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{||w_3'||} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(w_1, w_2, w_3) ist die gewünschte geordnete Orthonormalbasis.

7. Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben sei eine Ebene durch die Gleichung

$$2x - y + 4z = 0.$$

Finden Sie eine orthonormale Basis dieser Ebene.

Lösung

Wir wählen erst eine beliebige geordnete Basis von der Ebene und benutzen anschliessend Gram-Schmidt um daraus eine orthonormale Basis zu erhalten. Die beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

liegen beide in der Ebene und sind linear unabhängig. Somit ist (v_1, v_2) eine geordnete Basis der Ebene. Mit Gram-Schmidt erhalten wir die geordnete orthonormale Basis

(w_1, w_2) mit

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle w_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass je nach Wahl der geordneten Basis (v_1, v_2) eine andere ONB (w_1, w_2) herauskommt.