Serie 6

1. Sei $V = \{p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \mid c_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten von Grad kleiner gleich 3. Sei $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3, p_4) \subset V$ definiert durch

$$p_1(x) = x \quad p_2(x) = x^2 + 2 \quad p_3(x) = x^3 + 2x + 1 \quad p_4(x) = x^3 + x^2 + x.$$

a) Verifizieren Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

Lösung

Wir schreiben $\mathcal{B}$ in Koordinaten bezüglich den Monomen x^k und stellen diese (Spalten)-Vektoren als Matrix dar:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren in $\mathcal{B}$ bilden genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind, was wiederum genau dann passiert, wenn B invertierbar ist – und damit äquivalent ist zu $\det B \neq 0$. Wir rechnen und bekommen $\det B = 3$. Somit bildet $\mathcal{B}$ eine Basis.

b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren sowohl auf die Standardbasis $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ als auch auf $\mathcal{B}$ bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

an, um orthonormale Basen $\tilde{\mathcal{E}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ zu finden. Prüfen Sie nach, ob ihr erhaltenes Resultat tatsächlich stimmt.

Lösung

Der Gram-Schmidt Algorithmus liefert

- bezüglich der Standardbasis:

$$w_1' = 1 \quad , \quad w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$w_2' = x \quad , \quad w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$w_3' = x^2 - \frac{1}{3} \quad , \quad w_3 = 3\sqrt{\frac{5}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$w_4' = x^3 - \frac{3}{5}x \quad , \quad w_4 = \sqrt{\frac{7}{2}}\frac{5}{2}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).$$

- bezüglich der Basis $\mathcal{B}$:

$$
\begin{aligned}
q_1' &= x \quad , \quad \langle q_1', q_1' \rangle = \frac{2}{3} \\
q_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} x \\
q_2' &= x^2 + 2 \quad , \quad \langle q_2', q_2' \rangle = \frac{166}{15} \\
q_2 &= \sqrt{\frac{15}{166}} (x^2 + 2) \\
q_3' &= x^3 - \frac{35}{83} x^2 - \frac{3}{5} x + \frac{13}{83} \quad , \quad \langle q_3', q_3' \rangle = \frac{3392}{43575} \\
q_3 &= \frac{\sqrt{92379}}{35192} \left(415x^3 - 175x^2 - 249x + 65 \right) \\
q_4' &= \frac{525}{424} x^3 + \frac{315}{424} x^2 - \frac{315}{424} x - \frac{117}{424} \quad , \quad \langle q_4', q_4' \rangle = \frac{9}{53} \\
q_4 &= \frac{\sqrt{53}}{1272} \left(525x^3 + 315x^2 - 315x - 117 \right).
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen in das Skalarprodukt kann man nachrechnen, dass tatsächlich $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$ und $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$ gilt für $1 \leq i, j \leq 4$. Somit sind $\tilde{\mathcal{E}} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ und $\tilde{\mathcal{B}} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ die gesuchten geordneten Orthonormalbasen.

c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $M_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}}$ von $\tilde{\mathcal{E}}$ nach $\mathcal{E}$.

Lösung

Wir können direkt ablesen, dass

$$
M_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{5}{8}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \end{pmatrix}
$$

gilt.

d) Können Sie die Transformationsmatrix $M_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}}$ für eine beliebige Basis $\mathcal{A}$ bestimmen, wobei $\tilde{\mathcal{A}}$ die ONB bezeichne, die man durch das Gram-Schmidt Verfahren erhält? Überprüfen Sie Ihre erhaltene Matrix $M_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}}$, indem Sie die Standardbasis $\mathcal{E}$ verwenden und mit Teilaufgabe c) vergleichen.

Lösung

Wir bemerken zuerst, dass wir die Transformationsmatrix nicht direkt ablesen können, wie dies in Teilaufgabe c) der Fall war. In unserem Fall benutzen wir die Formeln aus dem Gram-Schmidt Verfahren, um die Transformationsmatrix anzugeben. Insbesondere wissen wir, dass der r-te Basisvektor von $\tilde{\mathcal{A}} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, nämlich q_r, wie folgt als Linearkombination der Basisvektoren von $\mathcal{A} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ausgedrückt werden kann:

$$
q_r = \frac{p_r - \sum_{i=1}^{r-1} \langle p_r, q_i \rangle q_i}{||q_r'||}.
$$

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{||q_1'||} p_1 \\
q_2 &= \frac{p_2 - \langle p_2, q_1 \rangle q_1}{||q_2'||} = -\frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||} p_1 + \frac{1}{||q_2'||} p_2 \\
q_3 &= \frac{p_3 - \langle p_3, q_1 \rangle q_1 - \langle p_3, q_2 \rangle q_2}{||q_3'||} = \frac{p_3}{||q_3'||} - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{||q_3'||} \frac{p_1}{||q_1'||} - \frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{||q_3'||} \left(\frac{p_2}{||q_2'||} - \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{||q_2'||} \frac{p_1}{||q_1'||} \right) \\
&= \left(\frac{\langle p_3, q_2 \rangle \langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||||q_3'||} - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_3'||} \right) p_1 - \frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{||q_2'||||q_3'||} p_2 + \frac{1}{||q_3'||} p_3 \\
q_4 &= \left(\frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||||q_4'||} - \frac{\langle p_4, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_4'||} - \frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_3, q_2 \rangle \langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||||q_3'||||q_4'||} + \frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_3, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_3'||||q_4'||} \right) p_1 \\
&\quad + \left(\frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_3, q_2 \rangle}{||q_2'||||q_3'||||q_4'||} - \frac{\langle p_4, q_2 \rangle}{||q_2' q_4'||} \right) p_2 - \frac{\langle p_4, q_3 \rangle}{||q_3'||||q_4'||} p_3 + \frac{1}{||q_4'||} p_4.
\end{aligned}
$$

Dies gibt uns die Spalten der Transformationsmatrix, also erhalten wir

$$
M_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{||q_1'||} & -\frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||} & \frac{\langle p_3, q_2 \rangle \langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||||q_3'||} - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_3'||} & \begin{array}{c} \frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||||q_4'||} - \frac{\langle p_4, q_1 \rangle}{||q_1' q_4'||} \\ - \frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_3, q_2 \rangle \langle p_2, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_2'||||q_3'||||q_4'||} + \frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_3, q_1 \rangle}{||q_1'||||q_3'||||q_4'||} \end{array} \\
0 & \frac{1}{||q_2'||} & -\frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{||q_2'||||q_3'||} & \frac{\langle p_4, q_3 \rangle \langle p_3, q_2 \rangle}{||q_2'||||q_3'||||q_4'||} - \frac{\langle p_4, q_2 \rangle}{||q_2'||||q_4'||} \\
0 & 0 & \frac{1}{||q_3'||} & -\frac{\langle p_4, q_3 \rangle}{||q_3'||||q_4'||} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{||q_4'||}
\end{pmatrix}
$$

Benutzen wir für $\mathcal{A}$ die Standardbasis, dann erhalten wir wie gewünscht die Matrix aus Teilaufgabe c).

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine beliebige Orthonormalbasis von U.

Lösung

Da $(1, 1, 1)^T$ und $(-1, 1, 0)^T$ orthogonal sind, genügt es diese Basis zu normieren und wir erhalten sofort

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T, \\
w_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T.
\end{aligned}
$$

b) Legen Sie mit Hilfe dieser Basis die Orthogonalprojektion auf U und die Orthogonalprojektion auf $U^\perp$ je durch ihre Koordinatenmatrizen bzgl. der kanonischen Basis fest.

Lösung
Es ist einfach $U^\perp$ zu bestimmen, denn es gilt $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$, d.h $U^\perp = \operatorname{Span}\{w_3\}$ für einen Vektor w_3, sodass die w_i paarweise orthogonal sind. Also ist w_3 eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{rcl} \langle w_1, w_3\rangle & = & 0 \\ \langle w_2, w_3\rangle & = & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rcl} \frac{1}{\sqrt{3}}(w_3)_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(w_3)_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(w_3)_3 & = & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(w_3)_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(w_3)_2 & = & 0 \end{array}\right)$$

Eine Lösung von diesem Gleichungssystem ist $w_3' = (1, 1, -2)^T$. Um eine Orthonormalbasis zu erhalten, betrachten wir $w_3 = \frac{w_3'}{\|w_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} w_3'$. Sei nun $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\right)$ die kanonische Basis und π_U, bzw. $\pi_{U^\perp}$ die Orthogonalprojektion auf U bzw. $U^\perp$. Aus

$$\begin{aligned}
\pi_U(e_1) &= e_1 - \langle e_1, w_3\rangle w_3 = \frac{1}{6}(5, -1, 2)^T \\
\pi_U(e_2) &= e_2 - \langle e_2, w_3\rangle w_3 = \frac{1}{6}(-1, 5, 2)^T \\
\pi_U(e_3) &= e_3 - \langle e_3, w_3\rangle w_3 = \frac{1}{6}(2, 2, 2)^T \\
\pi_{U^\perp}(e_1) &= e_1 - \langle e_1, w_1\rangle w_1 - \langle e_1, w_2\rangle w_2 = \frac{1}{6}(1, 1, -2)^T \\
\pi_{U^\perp}(e_2) &= e_2 - \langle e_2, w_1\rangle w_1 - \langle e_2, w_2\rangle w_2 = \frac{1}{6}(1, 1, -2)^T \\
\pi_{U^\perp}(e_3) &= e_3 - \langle e_3, w_1\rangle w_1 - \langle e_3, w_2\rangle w_2 = \frac{1}{6}(-2, -2, 4)^T
\end{aligned}$$

finden wir die folgenden Koordinatenmatrizen bzgl. der kanonischen Basis:

$$M(\pi_U) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

sowie

$$M(\pi_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man die Koordinatenmatrizen wie folgt bestimmen: Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt wegen der Assoziativität von Matrizen:

$$\begin{aligned}
P_U v &= \langle w_1, v\rangle w_1 + \langle w_2, v\rangle w_2 = w_1\langle w_1, v\rangle + w_2\langle w_2, v\rangle = w_1 w_1^T v + w_2 w_2^T v \\
&= (w_1 w_1^T + w_2 + w_2^T)v.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$M(\pi_U) = w_1 w_1^T + w_2 w_2^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und analog

$$M(\pi_{U^\perp}) = w_3 w_3^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Da $M(\pi_U) + M(\pi_{U^\perp}) = 1_3$ gilt, hätte es gereicht, eine der beiden Matrizen zu berechnen. Die andere kann man als Identität minus die erste berechnen.

c) Bestimmen Sie je ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsmenge U bzw. $U^\perp$.

Lösung
$M(\pi_U)v \in U$ und $M(\pi_{U^\perp})v \in U^\perp$ für alle $v \in V$. Insbesondere hat das Gleichungssystem $M(\pi_U)v = v$ die Lösungsmenge U und das Gleichungssystem $M(\pi_{U^\perp})v = v$ hat die Lösungsmenge $U^\perp$.

3. Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Projektionen auf die Ebene $E_1 = \{x + 3y = 2z\}$ respektive $E_2 = \{x = y\}$. Geben Sie die Matrix von $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an!

Lösung
Für die Ebene E_1 bestimmen wir erst eine natürliche Basis

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

im Sinne, dass $\mathcal{P}_1 v_i = v_i$ für $i = 1, 2$ und $\mathcal{P}_1 v_3 = 0$, d.h. v_1 und v_2 sind so gewählt, dass sie in E_1 liegen (und $\mathcal{P}_1|_{E_1} = \mathrm{Id}$) und $v_3 = v_1 \times v_2$ liegt orthogonal zur Ebene (wo gilt $\mathcal{P}_1|_{E_1^\perp} = 0$). In dieser Basis erhalten wir

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Wechsel von $\mathcal{B}_1$ zu der Standardbasis $\mathcal{E}$ ist gegeben durch

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Somit ist

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

und wir erhalten

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{E}}[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1} M_{\mathcal{E}\mathcal{B}_1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Analog gehen wir für $[\mathcal{P}_2]_\mathcal{E}$ vor, indem wir

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

setzen. Damit ist der Basiswechsel

$$L_{\mathcal{B}_2\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}_2} = L^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also

$$[\mathcal{P}_2]_\mathcal{E} = L_{\mathcal{B}_2\mathcal{E}}[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{B}_2} L_{\mathcal{E}\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

Lösung

Eine einfache Möglichkeit, die Orthonormalbasen von U und $U^\perp$ gleichzeitig zu bestimmen, ist die Anwendung der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf die Vektoren v_1, v_2 sowie einen zusätzlichen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, der die beiden zu einer Basis ergänzt, beispielsweise $v_3 = (1, 0, 0)^T$. Man erhält

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Orthonormalbasis für U ist dann $\{w_1, w_2\}$ während $\{w_3\}$ eine Orthonormalbasis von U^T ist.

Alternativ ermittelt man zunächst mit Gram-Schmidt die Orthonormalbasis w_1, w_2 von U und löst unabhängig davon das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

um das orthogonale Komplement von U^T zu bestimmen. Dann führt man auf der erhaltenen Basis von U^T eine weitere Gram-Schmidt-Orthonormalisierung durch.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrizen der Orthogonalprojektionen $\mathbb{R}^3 \to U \subset \mathbb{R}^3$ auf U und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp \subset \mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ an bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus a).

Lösung

Die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U ist gegeben durch

$$v \mapsto \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2.$$

Also ist die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis w_1, w_2 gegeben durch

$$(\langle e_j, w_i \rangle)_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 3}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man für die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

5. Es sei $V = M_{n,n}(R)$ mit dem Standardskalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass $\langle A|B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ ein Skalarprodukt auf V ist. Geben Sie ein Beispiel einer Orthonormalbasis von V an.

Lösung

Man berechnet

$$\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j},$$

also ist $\langle A|B \rangle$ das Standardskalarprodukt bezüglich der Koeffizienten $(a_{i,j})$ einer Matrix.

Insbesondere ist $(E_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ eine Orthonormalbasis, wobei $E_{i,j}$ die Matrix mit (i,j)-tem Koeffizient gleich 1 und ansonsten Null bezeichnet.

b) Sei $C \in V$ eine Matrix. Wir definieren $f \colon V \to V$ durch $f(A) = AC$. Zeigen Sie, dass f ein Endomorphismus von V ist, und bestimmen Sie die adjungierte Abbildung f^* bezüglich dem Skalarprodukt aus a).

Lösung

Dass f ein Endomorphismus von V ist, kann man leicht direkt prüfen.

Wir wollen nun die Adjungierte Abbildung berechnen: Für alle A und B in V gilt

$$\langle f(A)|B \rangle = \langle AC|B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t(AC)B) = \mathrm{Tr}({}^tC{}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^tAB{}^tC) = \langle A|B{}^tC \rangle.$$

Somit erhalten wir $f^*(B) = B{}^tC$.

6. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Wir definieren eine Matrix $B = {}^tAA$. Zeigen Sie, dass B symmetrisch ist, und dass $b(x,y) = {}^txBy$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Lösung
Es gilt ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA = B$. Also ist B symmetrisch.

Man überprüft leicht, dass b bilinear ist. Weiters gilt

$$b(y,x) = {}^tyBx = {}^t({}^tyBx) = {}^tx^tBy = {}^txBy = b(x,y),$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit verwendet haben, dass ${}^tyBx$ eine Zahl ist und das Transponierte einer Zahl die Zahl selber ist. Das vierte Gleichheitszeichen gilt, da B symmetrisch ist. Wir haben also gezeigt, dass b symmetrisch ist. Ausserdem gilt

$$b(x,x) = {}^txBx = {}^tx^tAAx = {}^t(Ax)Ax = \|Ax\|^2,$$

wobei die Norm auf der rechte Seite bezüglich des Standardskalarprodukts ist. Folglich gilt $b(x,x) \geq 0$, und $b(x,x) = 0$ genau dann, wenn $Ax = 0$ ist. Da A invertierbar ist, ist letzteres äquivalent zu $x = 0$. Dies beendet den Beweis, dass b ein Skalarprodukt ist.

7. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und sei f ein Endomorphismus von V. Wir definieren einen Endomorphismus g von V durch $g = f^* \circ f$. Zeigen Sie, dass $\ker(g) = \ker(f)$ ist.

Lösung
Wir zeigen zuerst die Richtung $\ker(f) \subset \ker(g)$: Sei $v \in \ker(f)$, also $v \in V$ mit $f(v) = 0$. Dann gilt auch $g(v) = f^*(f(v)) = f^*(0) = 0$, da f^* linear ist. Somit ist $v \in \ker(g)$, was die eine Inklusion beweist.

Nun zeigen wir die andere Inklusion, nämlich $\ker(g) \subset \ker(f)$: Sei $v \in \ker(g)$, also $v \in V$ mit $g(v) = 0$. Es folgt $0 = \langle 0|v\rangle = \langle g(v)|v\rangle = \langle f^*(f(v))|v\rangle = \langle f(v)|f(v)\rangle = ||f(v)||^2$, und deshalb $f(v) = 0$. Also ist $v \in \ker(f)$, was den Beweis beendet.