Serie 7

1. Berechnen Sie eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwenden Sie diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ zu lösen.

Lösung
Da die Matrix A invertierbar ist ($\det(A) \neq 0$), bilden die Spalten eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Das Gram-Schmidt Verfahren angewendet auf (v_1, v_2, v_3) liefert die (bezüglich dem Standardskalarprodukt) orthonormale Basis (w_1, w_2, w_3) mit

$$w_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad w_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad w_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Somit ist

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix. Die obere Dreiecksmatrix berechnet sich zu

$$R = Q^{-1}A = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(Dass man auf diese Art tatsächlich eine obere Dreiecksmatrix erhält, folgt aus dem Gram-Schmidt Verfahren.)
Durch Multiplikation der Gleichung $QRx = Ax = b$ von links mit der invertierbaren Matrix $Q^{-1} = Q^T$ erhält man das äquivalente Gleichungssystem $Rx = Q^T b = (4, 1, -1)^T$. Da R obere Dreiecksgestalt hat, erhält man hieraus schnell die Lösung $x = (2, 1, -1)^T$.

2. Sei $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ und $B = {}^t AA$.

a) Zeigen Sie, dass $b(x,y) = {}^t xBy$ ein Skalarprodukt definiert falls A invertierbar ist.

Lösung

Die Bilinearform, die zur Matrix B gehört, ist gegeben als $b(u,v) = {}^t uBv$. Sei A invertierbar und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist $Av \neq 0$ (da A invertierbar ist) und somit gilt

$$v^T \cdot (A^T A) \cdot v = (v^T A^T) \cdot Av = (Av)^T Av = \|Av\|^2 > 0.$$

Also ist $A^T A$ positiv definit.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Lösung

Behauptung: $\operatorname{Kern}(f_A) = \operatorname{Kern}(f_{{}^t AA})$.

Eine Inklusion folgt direkt: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = 0$ gilt auch ${}^t AAv = {}^t A0 = 0$.

Umgekehrt sei ${}^t AAv = 0$, dann gilt

$$\|Av\|^2 = {}^t(Av)Av = ({}^t v {}^t A) \cdot Av = {}^t v \cdot ({}^t AA) \cdot v = {}^t v0 = 0.$$

Da die euklidische Norm positiv definit ist, gilt $Av = 0$, also $v \in \operatorname{Kern}(f_A)$. Somit gilt die Behauptung.

Aus der Behauptung folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang}(A) &= \dim \operatorname{Bild}(f_A) = n - \dim \operatorname{Kern}(f_A) \\ &= n - \dim \operatorname{Kern}(f_{{}^t AA}) = \dim \operatorname{Bild}(f_{{}^t AA}) = \operatorname{Rang}({}^t AA). \end{aligned}$$

3. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass ${}^t xMx = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, und dass $b(x,y) = {}^t xMy$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von M. Das heisst: Finden Sie eine obere Dreiecksmatrix $R \in M_{33}(\mathbb{R})$ mit positiven Diagonaleinträgen, sodass $M = {}^t RR$ gilt.

Lösung

Um zu zeigen, dass b positiv definit ist, gibt es zwei Möglichkeiten.

Zum einen können wir das Hauptminorenkriterium aus der Analysis verwenden: Wir berechnen die Hauptminoren dieser Matrix, nämlich

$$M_{(1)} = 1, \quad M_{(2)} = 2, \quad M_{(3)} = \det(M) = 6.$$

Da alle Hauptminoren reell und positiv sind, folgt daraus, dass die quadratische Form positiv definit ist.

Zum anderen können wir direkt zeigen, dass $b(x) \geq 0$ ist, und $b(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$:

$$b(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$$

und der Ausdruck ist gleich 0 genau dann, wenn alle Quadrate verschwinden, also genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist.
Wir berechnen nun die Cholesky-Zerlegung von M: Sei

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Wegen $M = {}^tRR$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}r_{12} & r_{11}r_{13} \\ r_{12}r_{11} & r_{12}^2 r_{22}^2 & r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} \\ r_{13}r_{11} & r_{13}r_{12} + r_{23}r_{22} & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2, \end{pmatrix},$$

was uns 6 Gleichungen gibt. Wir wollen nun diese Gleichungen benutzen, um die Einträge r_{ij} der Matrix R zu bestimmen. Bezeichne mit M_{ij} den i, j-ten Eintrag von M. Man sieht, dass

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{i} r_{ki} r_{kj} \text{ für } i \leq j$$

gilt. Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Formeln

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j, \\ \sqrt{M_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ki}^2} & i = j, \\ \frac{1}{r_{ii}} \left(M_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right) & i < j. \end{cases}$$

Nun berechnen wir der Reihe nach:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{M_{11}} = 1, \\ r_{12} &= \frac{1}{r_{11}} M_{12} = 0, \\ r_{22} &= \sqrt{M_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{2}, \\ r_{13} &= \frac{1}{r_{11}} M_{13} = -1, \\ r_{23} &= \frac{1}{r_{22}} (M_{23} - r_{12}r_{13}) = \sqrt{2}, \\ r_{33} &= \sqrt{M_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle kann man leicht nachrechnen, dass tatsächlich $M = {}^tRR$ gilt.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine reelle, symmetrische Matrix. Führen Sie für A eine Hauptachsentransformation durch, das heisst, bestimmen Sie eine orthogonale Matrix X und eine Diagonalmatrix D, sodass $D = X^{-1}AX$ gilt.
Hinweis: Alle Eigenwerte von A sind ganze Zahlen.

Lösung
Das charakteristische Polynom von A ist

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 36\lambda^2 - 32\lambda = \lambda\left(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32\right).$$

Somit ist eine Nullstelle $\lambda_1 = 0$. Ausserdem wissen wir, dass das Produkt aller von null verschiedenen Nullstellen 32 ergeben muss. Da alle diese Nullstellen ganzzahlig sind, kommen nur $\pm\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ in Frage. Ein kurzes Nachrechnen zeigt, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 8$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = {}^t(1,1,1,1), \quad v_2 = {}^t(0,1,0,-1), \quad v_3 = {}^t(1,0,-1,0), \quad v_4 = {}^t(-1,1,-1,1)$$

hat. Wir müssen eine orthonormierte Eigenbasis von A bestimmen. Da die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix zueinander orthogonal sind und da v_1 und v_4 jeweils ihren eigenen Eigenraum aufspannen, müssen wir diese Vektoren nur noch normieren: Es gilt $\|v_1\| = \|v_4\| = 2$, also $\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{2}$, $\tilde{v}_4 = \frac{v_4}{2}$. Für die beiden Eigenvektoren zum Eigenwert 2 müssen wir Gram-Schmidt durchführen: Es gilt $\tilde{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{2}}$ und somit

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\|v_2\|} v_2 = v_3 \Rightarrow \tilde{v}_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{\sqrt{2}}.$$

Als Spalten einer Matrix erhalten wir somit

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Man prüft nach, dass $\det X = 1$ ist, und erhält schliesslich

$$D = X^{-1}AX = {}^tXAX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei f ein invertierbarer Endomorphismus von V.

Für Teilaufgaben b), d) und e) nehmen wir ausserdem an, dass V ein euklidischer Raum und f orthogonal ist.

a) Zeigen Sie, dass t genau dann ein Eigenwert von f ist, wenn t^{-1} ein Eigenwert von f^{-1} ist.

Lösung

Angenommen, t sei ein Eigenwert von f. Dann gibt es ein $v \in V\backslash\{0\}$ mit $f(v) = tv$. Wendet man f^{-1} auf beiden Seiten an, so erhält man $v = f^{-1}(tv) = tf^{-1}(v)$. Also haben wir $f^{-1}(v) = t^{-1}v$ und t^{-1} ist ein Eigenwert von f^{-1} wie gewünscht.
Die andere Richtung geht analog, indem man f mit f^{-1} ersetzt.

b) Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Eigenwerte von f eine Teilmenge von $\{-1, 1\}$ ist.

Lösung

Sei t ein reeller Eigenwert von f. Sei $v \in V\backslash\{0\}$ ein Eigenvektor zu t, also $f(v) = tv$. Wegen Orthogonalität von f und der Bilinearität des Skalarprodukts gilt

$$\langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle tv, tv\rangle = t^2\langle v, v\rangle. \tag{1}$$

Da $v \neq 0$ und das Skalarprodukt (per Definition) positiv definit ist, kann $\langle v, v\rangle$ nicht gleich 0 sein. Folglich ist $t^2 = 1$, also $t \in \{-1, 1\}$.

c) Für eine reelle Zahl t sei $P(t) := \det(\mathrm{Id} - tf)$. Zeigen Sie, dass P ein Polynom von Grad $n = \dim(V)$ ist mit $P(0) = 1$.

Lösung

Offensichtlich gilt $P(0) = \det(\mathrm{Id}) = 1$. Wir haben

$$P(t) = \det(\mathrm{Id} - tf) = \det(f)\det(f^{-1} - t\,\mathrm{Id}) = (-1)^n \det(f)\det(t\,\mathrm{Id} - f^{-1}).$$

Der Ausdruck $\det(t\,\mathrm{Id} - f^{-1})$ ist von derselben Form sie ein charakteristisches Polynom und somit mit derselben Argumentation wie für Lemma 4.3.13 im Skript ein Polynom von Grad n. Da $(-1)^n \det(f)$ eine Zahl ist, ist somit P ein Polynom von Grad n.

d) Zeigen Sie, dass für alle $t \neq 0$ gilt

$$t^n P(1/t) = \det(-f)P(t),$$

wobei $n = \dim(V)$ ist.

Lösung

Sei $n = \dim(V)$. Da f orthogonal ist ($f^{-1} = {}^tf$) und $\det(A) = \det({}^tA)$ ist, gilt für $t \neq 0$

$$\begin{aligned}
t^n P(1/t) &= t^n \det(\mathrm{Id} - \tfrac{1}{t}f) = t^n \det\left(\tfrac{1}{t}(t\,\mathrm{Id} - f)\right) = \det(t\,\mathrm{Id} - f)\\
&= \det(-f)\det(-f^{-1})\det(t\,\mathrm{Id} - f) = \det(-f)\det(-tf^{-1} + \mathrm{Id})\\
&= \det(-f)\det(\mathrm{Id} - tf^{-1}) = \det(-f)\det(\mathrm{Id} - t\,{}^tf)\\
&= \det(-f)\det({}^t(\mathrm{Id} - t\,{}^tf)) = \det(-f)\det(\mathrm{Id} - tf)\\
&= \det(-f)P(t).
\end{aligned}$$

e) Angenommen, n ist ungerade und $\det(f) = 1$. Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von f ist.

Lösung

Wir wollen zeigen, dass $\det(1 - f) = 0$ ist. Mit Teilaufgabe d) für $t = 1$ gilt

$$P(1) = \det(-f)P(1) = \underbrace{(-1)^n}_{=-1}\underbrace{\det(f)}_{=1}P(1) = -P(1).$$

Somit ist $\det(1 - f) = P(1) = 0$ und 1 ist ein Eigenwert von f.

6. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und sei $W \subset V$ ein Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass eine Projektion p von V auf W genau dann selbst-adjungiert ist, wenn p die orthogonale Projektion ist.

Lösung

$\Rightarrow$: Wir nehmen an, dass $p : V \to W \subset V$ selbst-adjungiert ist, also $\langle p(u), v\rangle = \langle u, p(v)\rangle$ für alle $u, v \in V$. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{Kern}(p) = W^\perp$ ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(p) &= \{u \in V \mid p(u) = 0\} = \{u \in V \mid \langle p(u), v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}\\ &= \{u \in V \mid \langle u, p(v)\rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}\\ &= \{u \in V \mid \langle u, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\} = W^\perp.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Wir nehmen an, dass p eine orthogonale Projektion ist, also $\mathrm{Kern}(p) = W^\perp$. Seien $u, v \in V$. Wir wollen zeigen, dass $\langle p(u), v\rangle = \langle u, p(v)\rangle$ ist. Dazu schreiben wir $u = u_1 + u_2$ und $v = v_1 + v_2$ mit $u_1, v_1 \in W$ und $u_2, v_2 \in W^\perp$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\langle p(u), v\rangle &= \langle p(u_1), v_1\rangle + \langle p(u_1), v_2\rangle + \langle p(u_2), v_1\rangle + \langle p(u_2), v_2\rangle\\ &= \langle p(u_1), v_1\rangle = \langle u_1, p(v_1)\rangle\\ &= \langle u_1, p(v)\rangle = \langle u, p(v)\rangle.\end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir wiederholt benutzt, dass das Skalarprodukt von einem Element in W und einem in $W^\perp$ verschwindet und dass $\mathrm{Kern}(p) = W^\perp$ ist.

b) Sei $i : W \to V$ die lineare Funktion gegeben durch $x \mapsto x$. Berechnen Sie die Adjungierte von i.

Lösung

Beachte, dass W ein euklidischer Raum ist mit Skalarprodukt induziert vom Skalarprodukt von V. Um Verwirrung zu vermeiden, schreiben wir $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ für das Skalarprodukt in V und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ für dasjenige in W. Für alle $v \in V$ und alle $w \in W \subset V$ gilt

$$\langle i(w), v\rangle_V = \langle w, v\rangle_V = \langle w, v_1\rangle_V + \langle w, v_2\rangle_V = \langle w, v_1\rangle_V = \langle w, v_1\rangle_W,$$

wobei $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in W$ und $v_2 \in W^\perp$ ist. Nach Definition der Adjungierten i^* gilt also $i^*(v) = v_1$ für alle $v \in V$ mit der Notation wie vorhin. Also ist die Adjungierte von i gerade die orthogonale Projektion p von V auf W.

7. Sei $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine orthogonale 3×3 Matrix mit Determinante 1.

Zeigen Sie, dass es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass A ähnlich ist zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Lösung
Aus Aufgabe 5 e) wissen wir, dass 1 ein Eigenwert von A ist. Sei $\mathrm{Eig}_{f,1}$ der zugehörige Eigenraum. Falls $\dim(\mathrm{Eig}_{f,1}) \geq 2$ ist, dann folgt aus $\det(A) = 1$, dass alle Eigenwerte von A gleich 1 sind. In dem Fall ist $A = 1_3$, also von der geforderten Form mit $t = \pi/2$. Wir müssen somit nur noch den Fall $\dim(\mathrm{Eig}_{f,1}) = 1$ behandeln. Betrachte den 2-dimensionalen Raum $W := \mathrm{Eig}_{f,1}^{\perp}$. Von Beispiel 5.8.7 (1) aus dem Skript wissen wir, dass $A|_W$ ähnlich ist zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

8. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und sei $W \subset V$ ein Unterraum. Sei p die orthogonale Projektion von V auf W. Wir definieren eine lineare Abbildung $r : V \to V$ durch

$$r(v) = v - 2p(v).$$

a) Zeigen Sie, dass r eine orthogonale Transformation ist und berechnen Sie r^*.
Lösung
Seien $u, v \in V$. Wie in Aufgabe 6 schreiben wir $u = u_1 + u_2$ und $v = v_1 + v_2$ mit $u_1, v_1 \in W$ und $u_2, v_2 \in W^{\perp}$. Da $p|_{W^{\perp}} = 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle r(u), r(v)\rangle &= \langle u, v\rangle - 2\langle p(u), v\rangle - 2\langle u, p(v) + 4\langle p(u), p(v)\rangle \\ &= \langle u, v\rangle - 2\langle u_1, v_1\rangle - 2\langle u_1, v_1\rangle + 4\langle u_1, v_1\rangle \\ &= \langle u, v\rangle. \end{aligned}$$

Folglich ist r eine orthogonale Transformation. Nach Aufgabe 6 wissen wir, dass jede orthogonale Projektion selbst-adjungiert ist. Somit gilt

$$\langle r(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - 2\langle p(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - 2\langle v, p(w)\rangle = \langle v, r(w)\rangle$$

für alle $v, w \in V$. Somit ist $r^* = r$, also ist auch r selbst-adjungiert.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Kern}(r - \mathrm{Id})$ und $\mathrm{Kern}(r + \mathrm{Id})$.
Lösung

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(r - \mathrm{Id}) &= \{v \in V \mid r(v) = v\} = \{v \in V \mid p(v) = 0\} = W^{\perp} \\ \mathrm{Kern}(r + \mathrm{Id}) &= \{v \in V \mid r(v) = -v\} = \{v \in V \mid p(v) = v\} = W. \end{aligned}$$

9. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_i \geq 0$ und nicht alle x_i sind gleich 0. Wir bezeichnen mit N die Zahl der $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_i \neq 0$.

Zeigen Sie, dass

$$N \geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

gilt.

Lösung
Wir benutzen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und erhalten

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_n) &= \sum_{x_i \neq 0} 1 \cdot x_i = \left\langle \begin{pmatrix} \delta_{x_1 \neq 0} \\ \vdots \\ \delta_{x_n \neq 0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} \delta_{x_1 \neq 0} \\ \vdots \\ \delta_{x_n \neq 0} \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{N} \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.\end{aligned}$$

Hier ist $\delta_{x_j \neq 0}$ gleich 1, falls $x_j \neq 0$ und gleich 0, falls $x_j = 0$. Quadrieren auf beiden Seiten gibt die gewünschte Ungleichung.