Serie 8

1. Führen Sie eine Hauptachsentransformation mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch, das heisst finden Sie eine orthogonale Matrix X und eine Diagonalmatrix D, so dass $D = X^{-1}AX$ gilt.

Lösung
Wir bemerken zuerst, dass A eine symmetrische Matrix mit reellen Einträgen ist. Das charakteristische Polynom von A ist $\mathrm{char}_A(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - A) = \lambda^2 - 1$. Somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beachte, dass die beiden Eigenvektoren orthogonal zueinander sind, da sie Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind. Durch Normieren erhält man $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit erhalten wir

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$D = X^{-1}AX = {}^tXAX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung des Endomorphismus $f = f_A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung
Die Matrix

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat charakteristisches Polynom $\mathrm{char}_A(t) = t^2 - 3t + 1$. Somit sind die Eigenwerte von ${}^tAA$

$$t_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Definiere

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma_1 = \sqrt{t_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \sqrt{t_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Wir wollen nun Eigenvektoren von ${}^tAA$ zu t_1 und t_2 bestimmen. Dazu lösen wir die lineare Systeme

$$\begin{cases} x+y = t_1x \\ x+2y = t_1y \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x+y = t_2x \\ x+2y = t_2y \end{cases} .$$

Wir erhalten Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

zu t_1 und t_2, respektive. Normieren gibt uns die Orthonormalbasis

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||} \right)$$

mit $||v_1|| = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ und $||v_2|| = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Die Singulärwertzerlegung von $f = f_A$ ist somit

$$f(v) = \langle v|w_1\rangle f(w_1) + \langle v|w_2\rangle f(w_2) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2.$$

3. Welche der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit?

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung

Wegen $\det A_2 = \det \left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = -6$ ist A nicht positiv definit. Die Hauptminoren $\det B_i$ von B sind $6, 33, 170$ für $i = 1, 2, 3$, also insbesondere alle positive. Mit dem Hauptminorenkriterium folgt, dass B positiv definit ist. Die Hauptminoren $\det C_i$ von C sind $3, 18, 135, 592$ für $i = 1, \ldots, 4$, also ist auch C positiv definit.

4. Ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ in n Variablen heisst *homogen vom Grad k*, falls

$$P(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k P(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeigen Sie, dass jede quadratische Form ein homogenes Polynom vom Grad 2 ist und dass umgekehrt jedes homogene Polynom vom Grad 2 eine quadratische Form ist.

Lösung

Nach Definition ist eine quadratische Form eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, dass $Q(x) =$

${}^t xAx$ für eine symmetrische Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt also

$$Q(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = Q(\lambda x) = {}^t(\lambda x)A(\lambda x) = (\lambda^2){}^t xAx = \lambda^2 Q(x) = \lambda^2 Q(x_1, \dots, x_n).$$

Somit ist jede quadratische Form ein homogenes Polynom vom Grad 2.
Umgekehrt, hat jedes homogene Polynom P vom Grad 2 die Form

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} c_{ij} x_i x_j \\ &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \dots + c_{1n}x_1x_n + c_{22}x_2^2 + \dots, \end{aligned}$$

wobei $c_{ij} \in \mathbb{R}$ sind. Definiere die symmetrische Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ als $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} c_{ii} & \text{falls } i = j \\ \frac{1}{2}c_{ij} & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

Mit dieser Wahl von A gilt ${}^t xAx = P(x_1, \dots, x_n)$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

5. Sei Q eine quadratische Form auf $V = \mathbb{R}^n$ und sei b die dazugehörige Bilinearform. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Seien $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $t_1, \dots, t_{p+q} \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$Q(x) = t_1 y_1^2 + \cdots + t_p y_p^2 - t_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - t_{p+q} y_{p+q}^2$$

gilt für

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \in V \quad \text{mit } y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren

$$p' := \max\{\dim(W) \mid W \subset V \text{ so dass } b|_{W \times W} \text{ ein Skalarprodukt ist}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $p' \geq p$ gilt.
Lösung
Definiere $W := \langle v_1, \dots, v_p \rangle$. Per Definition ist $W \subset V$. Ausserdem gilt

$$b(x, x) = Q(x) = t_1 y_1^2 + \dots + t_p y_p^2 \quad \text{für alle } x = \sum_{i=1}^{p} y_i v_i \in W.$$

Somit ist $b(x, x) \geq 0$ für alle $x \in W$; und $b(x, x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Anders ausgedrückt, $b|_{W \times W}$ ist positiv definit und somit ein Skalarprodukt. Es folgt, dass $p' \geq \dim(W) = p$ ist.

b) Sei $W \subset V$ ein Unterraum der Dimension $\dim(W) \geq p+1$. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in W \backslash \{0\}$ gibt, der eine Linearkombination von $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ ist und $Q(v) \leq 0$ erfüllt. Folgern Sie, dass $p' = p$ gilt.

Lösung

Da $\dim(W) \geq p+1$ ist, folgt, dass $W \cap \langle v_{p+1}, \ldots, v_n \rangle \neq \{0\}$ ist. Wähle $0 \neq v \in W \cap \langle v_{p+1}, \ldots, v_n \rangle$. Dieses $v \in W$ ist somit eine Linearkombination von $v_{p+1}, \ldots, v_n$, also $v = \sum_{i=p+1}^{n} y_i v_i$ für gewisse $y_i \in \mathbb{R}$. Nach Wahl von p und q in der Annahme der Aufgabe folgt, dass $Q(v) = -y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2 \leq 0$ ist.

Für jeder Unterraum W der Dimension $\geq p+1$ gilt also, dass $b|_{W \times W}$ nicht positiv und somit kein Skalarprodukt ist. Folglich kann p' nicht strikt grösser als p sein. Gemeinsam mit Teilaufgabe a) folgt, dass $p' = p$ ist.

6. Sei Q eine quadratische Form auf $V = \mathbb{R}^n$ und sei b die dazugehörige Bilinearform. Wir nehmen an, dass $Q \neq 0$ ist. Ziel dieser Aufgabe ist es ein einfaches Rezept anzugeben, mit dem man eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ finden kann, so dass

$$Q(x) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$$

gilt für

$$x = \sum_i y_i v_i \in V \quad \text{mit } y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in V$ mit $Q(v) = 1$ oder $Q(v) = -1$ gibt.

Lösung

Wähle $x \in V$ mit $Q(x) \neq 0$. (Beachte, dass so ein x existiert, da $Q \neq 0$ ist.) Definiere

$$v := \frac{x}{\sqrt{|Q(x)|}} \in V.$$

Wir rechnen nach, dass dieses v die geforderte Bedingung erfüllt. Da $Q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x,x) = \lambda^2 Q(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$Q(v) = Q\left(\frac{x}{\sqrt{|Q(x)|}}\right) = \frac{1}{|Q(x)|} Q(x) \in \{\pm 1\}.$$

b) Sei $v \in V$ so, dass $Q(v) \in \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass der Raum $W = \{w \in V \mid b(w,v) = 0\}$ Dimension $n-1$ hat.

Lösung

Betrachte die lineare Funktion

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{gegeben durch} \quad w \mapsto b(v,w).$$

Da nach Annahme $f(v) = Q(v) \neq 0$ gilt, ist $f \neq 0$. Somit ist f surjektiv. Mit der Dimensionformel für lineare Abbildungen erhalten wir

$$\dim(W) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = n - 1.$$

c) Folgern Sie die Aussage per Induktion über n.

Lösung

Für $n = 1$ entspricht die Behauptung gerade Teilaufgabe a).
Sei nun $n \geq 2$ und wir nehmen an, dass die Aussage für alle $\mathbb{R}^k$ für $k \leq n-1$ gilt. Aus Teilaufgabe a) haben wir ein $v \in V$ mit $Q(v) \in \{\pm 1\}$. Sei W der $n-1$-dimensionale Unterraum aus Teilaufgabe b). Wir betrachten nun die Einschränkung $Q|_W$ von Q auf $W \subset V$. Falls $Q|_W = 0$ ist, haben wir $Q(x) = \pm y_1^2$ für $x = y_1 v$, je nachdem, ob $Q(v) = +1$ oder -1 ist. Falls $Q|_W \neq 0$ ist, wenden wir die Induktionsannahme auf den $(n-1)$-dimensionalen Unterraum $W = \{w \in V \mid b(w,v) = 0\}$ und $Q|_W$ an. Dies gibt uns eine Basis $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ von W und $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass

$$Q|_W(x) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2$$

für $x = \sum_{i=1}^{n-1} y_i v_i \in V$. Falls $Q(v) = +1$ haben wir die Basis $(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$ von V und nicht-negative Zahlen $p' = p+1$ und $q' = q$, so dass

$$Q(x) = y^2 + y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2$$

für $x = yv + \sum_{i=1}^{n-1} y_i v_i \in V$. Falls $Q(v) = -1$ ist, haben wir die Basis $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ von V und nicht-negative Zahlen $p' = p$ und $q' = q+1$, so dass

$$Q(x) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2$$

für $x = yv + \sum_{i=1}^{n-1} y_i v_i \in V$. Durch Umbenennen der y_i erhält man die gewünschte Aussage.

7. Sei V ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit Rang 1.

a) Zeigen Sie, dass es Vektoren $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$f(v) = \langle v | v_1 \rangle v_2$$

für alle $v \in V$.

Lösung

Wir definieren $U := \mathrm{Kern}(f)$. Beachte, dass $\dim(U) = n-1$ und $\dim(U^\perp) = 1$ gilt. Wähle $v_1 \in U^\perp \setminus \{0\}$ beliebig und setze $v_2 := \frac{f(v_1)}{||v_1||^2}$. Sei $v \in V$ und schreibe $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U$ und $u_2 \in U^\perp$. Da $U^\perp$ eindimensional ist gilt ausserdem $u_2 = \lambda v_1$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle v | v_1 \rangle v_2 &= \langle u_1 | v_1 \rangle v_2 + \langle u_2 | v_1 \rangle v_2 = \langle \lambda v_1 | v_1 \rangle \frac{f(v_1)}{||v_1||^2} = \lambda f(v_1) \\ &= f(\lambda v_1) = f(u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) = f(v).\end{aligned}$$

b) Finden Sie die Singulärwertzerlegung von f.
Lösung
Die Singulärwertzerlegung können wir aus Teilaufgabe a) ablesen: Wir haben (mit der Notation aus Satz 5.10.1 aus dem Skript)

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = ||v_1||||v_2|| \quad (r = 1) \\
&B_1 = (\frac{v_1}{||v_1||}, v_2', \ldots, v_n'), \quad \text{wobei } (v_2', \ldots, v_n') \text{ eine Orthonormalbasis von } \operatorname{Kern}(f) \text{ ist.} \\
&B_2 = (\frac{v_2}{||v_2||}, w_2', \ldots, w_n'),
\end{aligned}$$

wobei $w_2', \ldots, w_n' \in V$ so gewählt sind, dass sie v_2 zu einer Orhonormalbasis von V ergänzen.

c) Was ist die Adjungierte von f?
Lösung
Für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v)|w\rangle = \langle\langle v|v_1\rangle v_2, w\rangle = \langle v|v_1\rangle\langle v_2|w\rangle = \langle v|\langle v_2|w\rangle v_1\rangle = \langle v|\langle w|v_2\rangle v_1\rangle$$

Folglich ist $f^*(w) = \langle w|v_2\rangle v_1$ für alle $w \in V$.

d) Drücken Sie die Resultate von den Teilaufgaben a), b) und c) im Falle $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt mit Matrizen und Vektoren aus.
Lösung
Bezeichne mit A die Matrix mit $f_A = f$ und sei B die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^n$. Die Singulärwertzerlegung von b) ist

$$A = X_1 D X_2$$

mit

$$\begin{aligned}
D &= \operatorname{diag}(||v_1||||v_2||, 0, \ldots, 0) \\
X_1 &= M_{B_2,B} = \left(\frac{v_2}{||v_2||}|w_2'|\ldots|w_n'\right) \\
X_2 &= M_{B,B_1} = \left(\frac{v_1}{||v_1||}|v_2'|\ldots|v_n'\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Für die Adjungierte aus c) kann man die analoge Aussage für Matrizen aufschreiben mit v_1 und v_2 vertauscht.

8. Sei V ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum und sei $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus von V.

Seien $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ geordnete Orthonormalbasen von V. Sei $r \leq n$ und seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$f(v) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \langle v|v_i\rangle w_i$$

die Singulärwertzerlegung von f ist.

a) Finden Sie eine Formel für f^* in Abhängigkeit von B_1 und B_2 und geben Sie die Singulärwertzerlegung von f^* an.

Lösung

Für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(v)|w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \langle v|v_i\rangle w_i \middle| w \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \langle v|v_i\rangle\langle w_i|w\rangle = \left\langle v \middle| \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \langle w_i|w\rangle v_i \right\rangle.$$

Somit ist

$$f^*(w) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \langle w|w_i\rangle v_i \quad \text{für alle } w \in V,$$

was gerade die Singulärwertzerlegung von f^* ist.

b) Beschreiben Sie den Kern von f^* und das Bild von f^* in Abhängigkeit von B_1 und B_2.

Lösung

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) &= \langle w_{r+1}, \dots, w_n\rangle \\ \mathrm{Bild}(f) &= \langle v_1, \dots, v_r\rangle \end{aligned}$$

c) Beschreiben Sie eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von ff^*.

Lösung

Die ONB von Eigenvektoren von ff^* ist $(w_1, \dots, w_n)$.

d) Berechnen Sie $||f(v)||^2$ in Abhängigkeit der Singulärwertzerlegung. Bestimmen Sie das Maximum und Minimum des Verhältnisses $\frac{||f(v)||^2}{||v||^2}$ für einen Vektor $v \in V\backslash\{0\}$.

Lösung

Es gilt

$$\langle f(v)|f(v)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \langle v|v_i\rangle w_i \middle| \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \langle v|v_j\rangle w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \langle v|v_i\rangle^2.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{||f(v)||^2}{||v||^2} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \frac{\langle v|v_i\rangle^2}{||v||^2}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \min_{v \in V\backslash\{0\}} \frac{||f(v)||^2}{||v||^2} &= \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \frac{\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j | v_i\rangle^2}{|| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j ||^2} = \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \frac{\alpha_i^2}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2} \\ &\geq \left(\min_{i=1,\dots,r} \sigma_i^2 \right) \min_{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i^2}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2} = \begin{cases} 0 & \text{falls } r < n \\ \min_{i=1,\dots,n} \sigma_i^2 & \text{falls } r = n \end{cases}. \end{aligned}$$

Für $v = e_i$ mit i so, dass σ_i minimal ist, wird dieser Wert auch tatsächlich angenommen. Analog erhält man

$$\max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{||f(v)||^2}{||v||^2} = \max_{i=1,\dots,r} \sigma_i^2.$$