Serie 9

1. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Zeigen Sie, dass die Permutationsmatrix P_σ orthogonal ist.

Lösung
Die Spaltenvektoren von P_σ sind lediglich eine Permutation der Standard-ONB von $\mathbb{R}^n$. Folglich bilden die Spaltenvektoren von P_σ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und nach Lemma 5.8.5 ist P_σ somit orthogonal.

2. Lesen Sie die Beweise zum Gram-Schmidt Algorithmus (Satz 6.2.4), der Cholesky Zerlegung (Korollar 6.2.7) und der QR-Zerlegung (Proposition 6.5.6) aus Kapitel 6 im Skript und vergleichen Sie sie mit den Beweisen aus Kapitel 5 im reellen Fall.

3. Für welche der folgenden Matrizen ist die zugehörige Sesquilinearform hermitesch?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3+i \\ 2 & i & -2i \\ 3-i & 2i & 0 \end{pmatrix}$

Lösung
Nach Proposition 6.1.9 aus dem Skript ist eine Sesquilinearform genau dann hermitesch, wenn die zugehörige Matrix hermitesch ist. Es genügt also zu prüfen, ob ${}^t\bar{A} = A$ ist.
Da $\bar{i} = -i$ ist, haben wir

$${}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3+i \\ 2 & -i & -2i \\ 3-i & 2i & 0 \end{pmatrix} \neq A,$$

weshalb A und somit auch die zugehörige Sesquilinearform nicht hermitesch ist.

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4+i & 7 \\ 4-i & -\pi & -2-8i \\ 7 & -2+8i & 2 \end{pmatrix}$

Lösung
Man prüft, dass tatsächlich ${}^t\bar{B} = B$ gilt. Somit ist B und somit die gehörige Sesquilinearform hermitesch.

c) $C = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1-i \\ 4 & 2 & 3 \\ -1+i & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Lösung
Da $\overline{1-i} = 1+i \neq -1+i$ gilt, ist C nicht hermitesch.

d) $D_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 2 & i & -ai \\ -i & 2-bi & 3 \\ ci & 3 & -4 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lösung
Wir berechnen

$$ {}^t\overline{D_{a,b,c}} = \begin{pmatrix} 2 & i & -ci \\ i & 2+bi & 3 \\ ai & 3 & -4 \end{pmatrix}. $$

Folglich ist $D_{a,b,c}$ genau dann hermitesch, wenn $b = 0$ und $a = c$ ist.

4. a) Berechnen Sie die Dimension des Raumes aller symmetrischen $n \times n$ Matrizen, also die Dimension von $\{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Lösung
Wegen der Bedingung, dass die Matrix symmetrisch sein soll, kann man nur den oberen rechten Teil der Matrix frei wählen. Alle anderen Einträge sind dann schon bestimmt. Somit haben wir

$$ n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} $$

Einträge, die frei wählbar sind. Es folgt, dass

$$ \dim\left(\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}\right) = \frac{n^2+n}{2} $$

ist.

b) Berechnen Sie die Dimension des Raumes aller hermiteschen $n \times n$ Matrizen, also die Dimension von $\{B \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{B} = B\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Lösung
Beachte, dass wir nun Matrizen mit komplexen Einträgen betrachten. Wegen der Bedingung, dass die Matrix hermitesch sein soll, müssen alle Diagonaleinträge reell sein. Ausserdem ist die gesamte Matrix eindeutig bestimmt, wenn wir den oberen rechten Teil kennen. Wir haben n Diagonaleinträge und der obere rechte Teil der Matrix ohne die Diagonale besteht aus

$$ (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)n}{2} $$

Einträgen. Da letztere Einträge komplex sind, erhalten wir für die gesuchte Dimension

$$ \dim\left(\{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{B} = B\}\right) = n + 2\frac{(n-1)n}{2} = n + (n-1)n = n^2. $$

5. Sei $g \in C([0,1])$ eine stetige Funktion von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass

$$ \langle f_1 | f_2 \rangle := \int_0^1 \overline{f_1(x)} f_2(x) g(x) dx $$

ein komplexes Skalarprodukt auf den Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen $C([0,1])$ definiert.

Lösung
Wegen der Linearität des Integrals und weil die komplexe Konjugation über dem f_1 steht, sieht man, dass es eine Sesquilinearform ist. Wegen

$$\overline{\langle f_2|f_1\rangle} = \int_0^1 f_1(x)\overline{f_2(x)}g(x)dx = \langle f_1|f_2\rangle$$

ist die Sesquilinearform ausserdem hermitesch. Positivität gilt wegen

$$\langle f|f\rangle = \int_0^1 \underbrace{|f(x)|^2 g(x)}_{\geq 0}\, dx \geq 0.$$

Wir müssen somit nur noch positive Definitheit überprüfen, also $\langle f|f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist. Eine Richtung ist klar. Die andere beweisen wir per Widerspruch. Sei $0 \neq f \in C([0,1])$. Wir wollen zeigen, dass $\langle f|f\rangle \neq 0$ ist. Wähle $a \in [0,1]$ mit $|f(a)| \geq \epsilon > 0$. Wegen Stetigkeit von f gibt es eine Umgebung U von a, so dass $|f(x)| \geq \epsilon/2$ für alle $x \in U \cap [0,1]$. Anders formuliert, es gibt ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x)| \geq \epsilon/2$ für alle $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap [0,1]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle f|f\rangle &= \int_0^1 |f(x)|^2 g(x)dx \geq \int_{(a-\delta,a+\delta)\cap[0,1]} |f(x)|^2 g(x)dx \\ &\geq 2\delta\frac{\epsilon^2}{4} \min_{x\in(a-\delta,a+\delta)\cap[0,1]} g(x) > 0.\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass $\langle\cdot|\cdot\rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

6. Für welche der folgenden Matrizen ist die zugehörige Sesquilinearform ein komplexes Skalarprodukt?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 5 \\ i & 2 & -3i \\ 5 & 3i & -1 \end{pmatrix}$

Lösung
Da A nicht hermitesch ist, ist auch die zugehörige Sesquilinearform nicht hermitesch und somit auch kein Skalarprodukt.

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2+i & -5i \\ 2-i & 1 & -4 \\ 5i & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung
Wir bemerken zuerst, dass B hermitesch ist. Nun berechnen wir

$$\det(B_2) = \det\begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix} = 3 - (4+1) = -2 < 0.$$

Nach dem Hauptminorenkriterium ist die zugehörige hermitesche Sesquilinearform nicht positiv definit und somit kein Skalarprodukt.

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 0 \\ -2i & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung

Wir bemerken zunächst einmal, dass C hermitesch ist. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} \det(C_1) &= 3 > 0 \\ \det(C_2) &= 8 > 0 \\ \det(C_3) &= 5 > 0 \end{aligned}$$

Nach dem Hauptminorenkriterium ist C positiv definit. Somit ist die zugehörige Sesquilinearform ein Skalarprodukt.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -i \\ 2 & 4 & 2 \\ i & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Lösung

Die Matrix D ist hermitesch. Es gilt aber $\det(D_2) = 0$. Nach dem Hauptminorenkriterium ist die zugehörige hermitesche Sesquilinearform somit nicht positiv definit und somit kein Skalarprodukt.

7. Sei V ein unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

a) Zeigen Sie, dass es eindeutige selbstadjungierte $f_1, f_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gibt mit $f = f_1 + if_2$.

Lösung

Existenz:

Die Endomorphismen

$$f_1 := \frac{1}{2}(f + f^*) \quad \text{und} \quad f_2 := \frac{1}{2i}(f - f^*)$$

erfüllen

$$\begin{aligned} f_1 + if_2 &= \frac{1}{2}(f + f^*) + \frac{1}{2}(f - f^*) = f \\ f_1^* &= \frac{1}{2}(f^* + f) = f_1 \\ f_2^* &= \frac{1}{-2i}(f^* - f) = f_2 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit:

Angenommen es gibt selbstadjungierte Endomorphismen $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit

$$f_1 + if_2 = f = g_1 + ig_2. \tag{1}$$

Durch Adjunktion erhalten wir

$$f_1^* - if_2^* = f^* = g_1^* - ig_2^*$$

und somit

$$f_1 - if_2 = f^* = g_1 - ig_2.$$

Addieren resp. Subtrahieren mit Gleichung (1) gibt $f_1 = g_1$ und $f_2 = g_2$.

b) Zeigen Sie, dass f genau dann normal ist, wenn f_1 und f_2 wie in a) miteinander kommutieren.

Lösung
Da f_1 und f_2 selbstadjungiert sind, berechnen wir

$$\begin{aligned} f^*f &= (f_1 + if_2)^*(f_1 + if_2) = (f_1^* - if_2^*)(f_1 + if_2) = (f_1 - if_2)(f_1 + if_2) \\ &= f_1^2 + f_2^2 + if_1f_2 - if_2f_1 \end{aligned}$$

und analog

$$ff^* = (f_1 + if_2)(f_1 - if_2) = f_1^2 + f_2^2 - if_1f_2 + if_2f_1.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist normal} \quad &\Leftrightarrow \quad f^*f = ff^* \\ &\Leftrightarrow \quad if_1f_2 - if_2f_1 = if_2f_1 - if_1f_2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2if_1f_2 = 2if_2f_1 \\ &\Leftrightarrow \quad f_1f_2 = f_2f_1 \\ &\Leftrightarrow \quad f_1 \text{ und } f_2 \text{ kommutieren.} \end{aligned}$$

8. Sei V ein unitärer Raum. Zeigen Sie die folgende Polarisationsformel:

$$\langle w|v\rangle = \frac{1}{4}\left(\left(||v+w||^2 - ||v-w||^2\right) + i\left(||v+iw||^2 - ||v-iw||^2\right)\right)$$

für alle $v, w \in V$.

Lösung
Wir berechnen

$$\begin{aligned} &\left(||v+w||^2 - ||v-w||^2\right) + i\left(||v+iw||^2 - ||v-iw||^2\right) \\ &= \langle v+w|v+w\rangle - \langle v-w|v-w\rangle + i\langle v+iw|v+iw\rangle - i\langle v-iw|v-iw\rangle \\ &= 2\langle v|w\rangle + 2\langle w|v\rangle + 2i\langle v|wi\rangle + 2i\langle iw|v\rangle \\ &= 2\langle v|w\rangle + 2\langle w|v\rangle - 2\langle v|w\rangle + 2\langle w|v\rangle \\ &= 4\langle w|v\rangle \end{aligned}$$

für alle $v, w \in V$.