Serie 10

1. Sei V ein unitärer Vektorraum und seien f und g zwei normale Endomorphismen auf V.

a) Zeigen Sie, dass die Summe $f+g$ nicht immer normal ist.

Lösung
Betrachet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt ${}^t\bar{A} = A$ und ${}^t\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Man berechnet $B^t\bar{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = {}^t\bar{B}B$. Die zugehörigen Endomorphismen f_A und f_B sind also normal. Für die Summe

$$C := A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt aber

$$C^t\bar{C} = \begin{pmatrix} 8 & 4i \\ -4i & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 4i \\ -4i & 8 \end{pmatrix} = {}^t\bar{C}C.$$

Somit ist der Endomorphismus $f_C = f_{A+B} = f_A + f_B$ nicht normal.

b) Zeigen Sie: Falls f^* and g kommutieren, dann ist $f+g$ normal.

Lösung
Wir bemerken zuerst, dass f^* und g genau dann kommutieren, wenn auch g^* und f kommutieren. Die Gleichungen $f^*g = gf^*$ und $g^*f = fg^*$ sind in der Tat äquivalent, indem man bei jeweils einer Gleichung auf beiden Seiten die Adjungierte nimmt. Wir wollen also zeigen, dass $f+g$ normal ist, wenn sowohl f^* und g als auch g^* und f kommutieren. Wir haben die folgenden äquivalenten Umformulierungen:

$$\begin{aligned} f+g \text{ sind normal } &\Leftrightarrow (f+g)(f+g)^* = (f+g)^*(f+g) \\ &\Leftrightarrow ff^* + fg^* + gf^* + gg^* = f^*f + f^*g + g^*f + g^*g \\ &\Leftrightarrow fg^* + gf^* = f^*g + g^*f, \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz gilt, da f und g normal sind. Unter unserer Annahme, dass f^* und g (und somit auch g^* und f) kommutieren, gilt die letzte Gleichung und $f+g$ ist normal.

2. Betrachten Sie den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und den unitären Raum $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt. Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Weshalb?

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3i & 4-i \\ -3i & 2 & 6+2i \\ 4+i & 6-2i & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C})$

Lösung
Die Matrix A ist hermitesch, also ${}^t\bar{A} = A$. Folglich ist der Endomorphismus f_A selbstadjungiert, also $f_A^* = f_A$. Somit ist der Endomorphismus auch normal ($f_A f_A^* = f_A^* f_A$) und nach Satz 6.6.2 vom Skript ist er - und somit auch die Matrix - diagonalisierbar.

b) $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

Lösung
Die Matrix B ist symmetrisch. Folglich ist der Endomorphismus f_B selbstadjungiert. Nach Theorem 5.7.2 ist die Matrix diagonalisierbar.

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$

Lösung
Beachte, dass die komplexe Matrix C zwar symmetrisch, nicht aber hermitesch ist. Wir können also den Spektralsatz nicht anwenden. In der Tat zeigt folgende Rechnung, dass die Matrix nicht diagonalisierbar ist: Das charakteristische Polynom von C ist

$$\operatorname{char}_C(t) = \det(t\operatorname{Id} - C) = \det\begin{pmatrix} t-4 & -2i \\ -2i & t \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2.$$

Folglich sind beide Eigenwerte 2. Wäre C diagonalisierbar, dann gäbe es ein $X \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ mit $C = XDX^{-1}$, wobei D die Diagonalmatrix zwei 2en auf der Diagonale ist. Dann wäre aber

$$C = 2X\operatorname{Id}_2 X^{-1} = 2\operatorname{Id}_2,$$

was einen Widerspruch gibt. Also ist C nicht diagonalisierbar.

3. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ heisst *von endlicher Ordnung*, falls es ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $A^k = 1_n$ gibt. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass so eine Matrix immer diagonalisierbar ist.

Sei also A eine Matrix von endlicher Ordnung und k so, dass $A^k = 1_n$ ist. Wir bezeichnen mit $\langle x|y\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

a) Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ sei

$$b(x,y) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\langle A^j x | A^j y\rangle.$$

Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist.

Lösung
Zunächst prüfen wir, dass b eine Sesquilinearform ist: Dies gilt, da das Standardskalarprodukt eine Sesquilinearform ist. Weil $\langle\cdot|\cdot\rangle$ hermitesch ist und dies Summe mit komplexer Konjugation vertauscht, ist auch b hermitesch. Die Positivität von b folgt ebenfalls aus der Positivität von $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Als Letztes überlegen wir uns noch, weshalb b positiv definit ist. Wir haben $b(x,x) = 0$ genau dann, wenn $\langle A^j x|A^j x\rangle = 0$

ist für jedes $0 \leq j \leq k-1$. Dies ist wegen positiver Definitheit des Standardskalarprodukt genau dann der Fall, wenn $x = 0$ ist. Somit haben wir gezeigt, dass b ein komplexes Skalarprodukt ist.

b) Zeigen Sie, dass A bezüglich des Skalarprodukts b unitär ist.

Lösung

Wir wollen zeigen, dass $b(Ax, Ay) = b(x, y)$ ist für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$. Durch Einsetzen in die Definition berechnen wir

$$\begin{aligned} b(Ax, Ay) &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \langle A^j Ax | A^j Ay \rangle = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \langle A^j x | A^j y \rangle + \langle \underbrace{A^k x}_{=x} | \underbrace{A^k y}_{=y} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \langle A^j x | A^j y \rangle = b(x, y). \end{aligned}$$

c) Folgern Sie, dass A diagonalisierbar ist. Gibt es immer eine Basis von Eigenvektoren die bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormal ist?

Lösung

Nach dem Spektralsatz (Theorem 6.6.3) ist A diagonalisierbar.

Die Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren, die nach Theorem 6.6.3 existiert, ist im Allgemeinen lediglich bezüglich des Skalarprodukts, bezüglich dessen die Matrix A unitär ist. In unserem Fall also orthonormal bezüglich des Skalarprodukts b. Folgendes Beispiel zeigt, dass es bezüglich des Standardskalarprodukts tatsächlich keine Orthonormalbasis von Eigenvektoren geben muss: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Die Eigenwerte sind -1 und 1 mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese Eigenvektoren sind nicht orthogonal bezüglich dem Standardskalarprodukt. Folglich gibt es keine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts.

4. Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\mathrm{char}_A(t) = \det(t \operatorname{Id} - A) = (t-3)(t-5)(t-1).$$

Somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ und insbesondere mit jeweils algebraischer Vielfachheit 1. Folglich ist auch die geometrische Vielfachheit 1. Somit haben wir drei Jordanblöcke $J_{1,1}, J_{1,3}, J_{1,5}$ der Grösse 1. Die Jordannormalform von A ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist A in diesem Beispiel sogar diagonalisierbar.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

Die Matrix B hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Von letzterem wissen wir bereits, dass die Jordannormalform von B einen Jordanblock $J_{1,4}$ der Grösse 1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ hat. Wir müssen nun die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ bestimmen, damit wir wissen, ob es einen Jordanblock $J_{2,4}$ der Grösse 2 oder ob es zwei Jordanblöcke $J_{1,4}$ der Grösse 1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gibt. Wir berechnen den Eigenraum zum Eigenwert 1 wie folgt:

$$\mathrm{Eig}_{1,B} = \mathrm{Kern}(B{-}\mathrm{Id}) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ gleich $\dim(\mathrm{Eig}_{1,B}) = 2$. Also gibt es zwei Jordanblöcke der Grösse 1 zum Eigenwert 1. Die Jordannormalform von B ist somit

$$J_{2,1} \boxplus J_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit $A^k = 1_n$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Zeigen Sie, dass dann sogar $A^2 = 1_n$ gilt.

Lösung

Nach dem Spektralsatz ist die Matrix A diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Wegen $A^k = 1_n$ ist $\lambda_i^k = 1$. Also gilt $\lambda_i = \pm 1$ und somit $\lambda_i^2 = 1$ für alle i. Folglich ist A^2 ähnlich zur Einheitsmatrix und somit gilt $A^2 = 1_n$.

6. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom jeder hermiteschen Matrix reelle Koeffizienten hat.

a) Mit Spektralsatz

Lösung

Jede hermitesche Matrix A ist nach dem Spektralsatz ähnlich zu einer Diagonalmatrix D mit reellen Diagonaleinträgen. Das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_A(t)$ von A ist invariant unter Ähnlichkeit. Folglich ist es gleich dem charakteristischen Polynom der Matrix D, welche nur reelle Einträge besitzt. Also hat $\mathrm{char}_A(t)$ reelle Koeffizienten.

b) Ohne Spektralsatz

Lösung

F"ur jedes komplexe Polynom $\varphi(x) = \sum a_i x^i$ definieren wir das komplex konjugierte Polynom durch $\overline{\varphi}(x) := \sum \overline{a}_i x^i$. Diese Konstruktion hat die Grundeigenschaft $\overline{\varphi \cdot \psi} = \overline{\varphi} \cdot \overline{\psi}$.

Für eine beliebige hermitesche Matrix A mit charakteristischen Polynom $\operatorname{char}_A(t) = \sum_i a_i t^i$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{char}_A(t) &= \det(t\,\mathrm{Id}_n - A) \\
&= \overline{\det\left({}^t\overline{(t\,\mathrm{Id}_n - A)}\right)} \\
&= \overline{\det\left(t\,\mathrm{Id}_n - {}^t\bar{A}\right)} \\
&= \overline{\det\left(t\,\mathrm{Id}_n - A\right)} \\
&= \overline{\operatorname{char}_A}(t),
\end{aligned}$$

folglich $\overline{a_i} = a_i$, also $a_i \in \mathbb{R}$ für alle i.

7. Für $n \geq 1$ und einen beliebigen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten Sie den Jordanblock

$$A = J_{n,\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie A^k für alle $k \geq 0$.

Lösung

In den Fällen $n = 1, 2, 3, 4$ erkennen wir durch Ausrechnen der ersten Terme das folgende Muster für die Matrix A^k:

$$\begin{aligned}
&(\lambda^k) && \text{für } n = 1 \\
&\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} && \text{für } n = 2 \\
&\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} && \text{für } n = 3 \\
&\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{3}\lambda^{k-3} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} && \text{für } n = 4\,.
\end{aligned}$$

Um eine allgemeine Formel zu finden, schreiben wir $A = \lambda\,\mathrm{Id}_n + N$ mit der nilpotenten Matrix

$$N := \Big(\delta_{j-i,1}\Big)_{1\le i,j\le m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Da N und Id_n kommutieren, folgt

$$A^k = (\lambda \operatorname{Id}_n + N)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \lambda^k N^{k-\ell}.$$

Mit einem Induktionsargument folgt für alle $m \ge 0$

$$N^m = \Big(\delta_{j-i,m}\Big)_{1\le i,j\le m}$$

und somit

$$A^k = \Big(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \lambda^\ell \delta_{j-i,k-\ell}\Big)_{i,j} = \Bigg(\binom{k}{j-i}\lambda^{k-(j-i)}\Bigg)_{1\le i,j\le n},$$

wobei wir $\binom{k}{j-i}\lambda^{k-(j-i)}$ für $j-i \notin \{0,\dots,k\}$ als 0 interpretieren.

b) Bestimmen Sie

$$\exp(A) = \sum_{k\ge 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

Lösung
Da Id_n und A kommutieren, gilt

$$\exp(A) = \exp(\lambda \operatorname{Id}_n + N) = \exp(\lambda \operatorname{Id}_n) \cdot \exp(N) = e^\lambda \exp(N).$$

Wir haben

$$\exp(N) = \sum_{m\ge 0} \frac{N^m}{m!} = \Big(\sum_{m\ge 0} \frac{\delta_{m,j-i}}{m!}\Big)_{i,j} = \Big(\frac{\delta_{i\le j}}{(j-i)!}\Big)_{i,j},$$

mit

$$\frac{\delta_{i\le j}}{(j-i)!} = \begin{cases} \frac{1}{(j-i)!} & \text{für alle } i \le j \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Somit gilt $\exp(A) = \Big(\exp(\lambda)\frac{\delta_{i\le j}}{(j-i)!}\Big)_{1\le i,j\le n}$.

8. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein Polynom $p(X)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

Lösung

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\operatorname{char}_A(X) = X^3 - 6X^2 - 3X + 18.$$

Nach dem Satz von Caley-Hamilton gilt

$$\begin{aligned} & \operatorname{char}_A(A) = A^3 - 6A^2 - 3A + 18\,\mathrm{Id}_3 = 0 \\ \iff \quad & \mathrm{Id}_3 = -\frac{1}{18}A^3 + \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{6}A, \end{aligned}$$

woraus durch Multiplizieren mit A^{-1} folgt:

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}\,\mathrm{Id}_3\ .$$

Das gesuchte Polynom ist somit

$$p(X) = -\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{6}\,\mathrm{Id}_3$$

9. Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix A mit

$$A^2 + 2A + 5\,\mathrm{Id}_n = 0$$

genau dann, wenn n gerade ist.

Lösung

Angenommen n ist ungerade und A ist eine $n \times n$-Matrix mit $A^2 + 2A + 5\,\mathrm{Id}_n = 0$. Weil der Grad des charakteristische Polynom von A ungerade ist und komplexe Eigenwerte immer paarweise auftreten, besitzt A einen reellen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor v. Mit $p(X) := X^2 + 2X + 5$ folgt

$$0 = p(A)v = (A^2 + 2A + 5\,\mathrm{Id}_n)v = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)v = P(\lambda)v,$$

also $P(\lambda) = 0$ und λ ist eine reelle Nullstelle von $p(X)$. Das Polynom $p(X)$ besitzt aber nur die komplexen Nullstellen $-1 \pm 2i$, was ein Widerspruch ist.

Bemerkung. Man kann den obigen Fall auch direkter aus dem Satz von Cayley-Hamilton herleiten.

Für $n = 2$ erfüllt eine beliebige Matrix A mit charakteristischem Polynom $\operatorname{char}_A(X) = X^2 + 2X + 5$ die Bedingung. Falls man die Diagonaleinträge von A beide gleich -1 wählt, findet man zum Beispiel die Lösung $A_2 := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Für beliebige gerade $n \geq 0$, sei A die $n \times n$-Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} A_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A_2 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$A^2 + 2A + 5\,\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} A_2 + 2A_2 + 5\,\mathrm{Id}_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A_2 + 2A_2 + 5\,\mathrm{Id}_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Damit ist die Aussage der Aufgabe bewiesen.