Serie 11

1. Bestimmen Sie die zu den folgenden Matrizen gehörige Jordansche Normalform (JNF) in Abhängigkeit der Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Lösung

Die Eigenwerte von der oberen Dreiecksmatrix A sind a und c. Wir betrachten die folgenden Fallunterscheidungen:

- $a \neq c$: Die JNF von A ist $J_{1,a} \boxplus J_{1,c} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
- $a = c$ und $b = 0$: Die JNF von A ist $J_{1,a} \boxplus J_{1,a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
- $a = c$ und $b \neq 0$: Wir berechnen

$$\operatorname{Kern}(A - a\,\mathrm{Id}_2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Die geometrische Vielfachheit zum Eigenwert a ist somit gleich 1. Folglich gibt es nur einen Jordanblock zum Eigenwert 1, der somit Grösse 2 hat. Die JNF von A ist also $J_{2,a} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} t & a & b \\ 0 & t & c \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$, wobei $t \in \mathbb{C}$ ist.

Lösung

Der einzige Eigenwert von B ist t und hat somit algebraische Vielfachheit 3. Wir unterscheiden folgende Fälle:

- $a = 0$: Wir berechnen den Eigenraum

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}_{t,A} &= \operatorname{Kern}(A - t\,\mathrm{Id}_3) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{falls } b \neq 0 \text{ oder c} \neq 0. \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{falls } b = c = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

– $b \neq 0$ oder $c \neq 0$: Die geometrische Vielfachheit von t ist gleich 2. Somit gibt es 2 Jordanblöcke zum Eigenwert t. Die JNF von A ist also

$$J_{2,t} \boxplus J_{1,t} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

– $b = c = 0$: Die geometrische Vielfachheit von t ist gleich 3. Somit gibt es 3 Jordanblöcke zum Eigenwert t. Die JNF von A ist also

$$J_{1,t} \boxplus J_{1,t} \boxplus J_{1,t} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

- $a \neq 0$: Wir berechnen den Eigenraum

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}_{t,A} &= \mathrm{Kern}(A - t\,\mathrm{Id}_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{falls } c \neq 0. \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle & \text{falls } c = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

– $c \neq 0$: Die geometrische Vielfachheit von t ist gleich 1. Somit gibt es nur einen Jordanblock zum Eigenwert t. Die JNF von A ist somit

$$J_{3,t} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

– $c = 0$: die geometrische Vielfachheit von t ist gleich 2. Somit gibt es zwei Jordanblöcke zum eigenwert t. Die JNF von A ist somit

$$J_{2,t} \boxplus J_{1,t} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalformen der folgenden Matrizen sowie die zugehörigen Jordan-Basen von $\mathbb{C}^5$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung
Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{char}_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 \\ 1 & \lambda+3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\lambda^2+2\lambda+1\right)\left(\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8\right) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^3.
\end{aligned}$$

Folglich hat A die Eigenwerte -1 und 2.
Sei $(e_1, \dots, e_5)$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^5$. Die Form der Matrix zeigt, dass $B_1 = (e_1, e_2)$ eine Basis vom Hauptraum $V_1 := \{v \in \mathbb{C}^5 \mid (A + 1_5)^2 v = 0\}$ bzgl. des Eigenwertes -1 ist, und $B_2 = (e_3, e_4, e_5)$ eine Basis vom Hauptraum $V_2 := \{v \in \mathbb{C}^5 \mid (A - 2 \cdot 1_5)^3 v = 0\}$ bzgl. des Eigenwertes 2. Wir suchen die Jordansche Normalform von f_A auf V_1 und V_2.
Die Darstellungsmatrix $f_A\big|_{V_1}$ von f_A auf V_1 ist die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom $(\lambda + 1)^2$. Weil die geometrische Vielfacheit von -1 gleich 1 ist, ist die JNF $J_{2,-1}$. Wir wollen eine Basis finden, bezüglich der A_1 in der JNF steht. Dafür genügt es (Lemma 7.1.4), einen Vektor $v \in V_1$ [also $(A_1 + 1_2)^2 v = 0$] mit $(A + 1_2)v \neq 0$ zu finden. Dann ist die Darstellungsmatrix von A_1 bezüglich der Basis $((A_1 + 1_2)v, v)$ gerade der Jordanblock $J_{2,-1}$.
Wir berechnen

$$\operatorname{Eig}_{-1,A} = \operatorname{Kern}(A + 1_2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Insbesondere ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Eig}_{-1,A}$. Wir können also beispielsweise $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen.
Bezüglich der Basis

$$((A + 1_2)v, v) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

von V_1 ist die Darstellungsmatrix von $f_A\big|_{V_1}$ also gleich $J_{2,-1}$.
Betrachte nun die Einschränkung $f_A\big|_{V_2}$. Die Matrix von $f_A V_2$ bezüglich $B_2 = (e_3, e_4, e_5)$ ist

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die JNF ist entweder

$$J_{1,2} \boxplus J_{1,2} \boxplus J_{1,2}, \quad J_{1,2} \boxplus J_{2,2} \quad \text{oder} \quad J_{3,2},$$

je nachdem was die Dimension des Eigenraums ist (3, 2 oder 1).
Wir berechnen

$$\mathrm{Eig}_{2,A_2} = \mathrm{Kern}(A_2 - 2 \cdot 1_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Folglich ist $\dim \mathrm{Eig}_{2,A_2} = 1$ und die JNF von $f_A\big|_{V_2}$ ist $J_{3,2}$.
Wir suchen nun einen Vektor $v \in V_2$ [also $(A_2 - 2 \cdot 1_3)^3 v = 0$] mit $(A_2 - 2 \cdot 1_2)^2 v \neq 0$. Dann ist die Darstellungsmatrix von $f_A\big|_{V_2}$ bezüglich der Basis $\big((A_2 - 2 \cdot 1_3)^2 v, (A_2 - 2 \cdot 1_3)v, v\big)$ von V_2 gleich dem Jordanblock $J_{3,2}$.
Wir berechnen

$$\mathrm{Kern}(A_2 - 2 \cdot 1_3)^2 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir können also beispielsweise $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nehmen. Die Basis für V_2 ist dann

$$((A_2 - 2 \cdot 1_3)^2 v, (A_2 - 2 \cdot 1_3)v, v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Die Matrix von f_A bezüglich die Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von V ist nun die Matrix $J_{2,-1} \boxplus J_{3,2}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & -8 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

Lösung

Das charakteristische Polynom von B ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{char}_B(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda-8 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & \lambda-9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & \lambda+8 & -12 \\ -6 & -4 & 0 & 4 & \lambda-6 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-3)\det \begin{pmatrix} \lambda-8 & -6 & 0 & 0 \\ 12 & \lambda+9 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & \lambda+8 & -12 \\ -6 & -4 & 4 & \lambda-6 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-3)\det \begin{pmatrix} \lambda-8 & -6 \\ 12 & \lambda+9 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda+8 & -12 \\ 4 & \lambda-6 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-3)(\lambda^2+\lambda)(\lambda^2+2\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+2)\lambda^2.
\end{aligned}
$$

Folglich hat B die Eigenwerte -2, -1, 0 und 3.
Da die Eigenwerte -2, -1 und 3 mit algebraischer (und somit auch geometrischer) Vielfachheit 1 auftreten, haben die zugehörigen Jordan-Blöcke Grösse 1. Es genügt deshalb, zugehörige Eigenvektoren zu bestimmen. Wir wählen beispielsweise $w_{-2} = (0,0,0,2,1)^T$, $w_{-1} = (2,-3,0,0,0)^T$ und $w_3 = (0,0,1,0,0)^T$.
Zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehört die Matrix $B + 0 \cdot 1_5 = B$. Wir berechen

$$
B^2 = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -12 \end{pmatrix}
$$

mit $\mathrm{rang}(B) = 4$ und $\mathrm{rang}(B^2) = 3$. Wir suchen nun einen Vektor $v \in \mathbb{C}^5$ mit $B^2 v = 0$ und $Bv \neq 0$. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\ker(B^2) &= \mathrm{span}\left\{(3,-4,0,0,0)^T, (0,0,0,3,2)^T\right\} \\
\ker(B) &= \mathrm{span}\left\{(0,0,0,3,2)^T\right\}.
\end{aligned}
$$

Somit können wir beispielsweise $v = (3,-4,0,0,0)^T$ wählen. Somit bildet

$$
(Bv, v) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
$$

eine Basis vom Hauptraum $V' := \{v \in \mathbb{C}^5 \mid B^2 v = 0\}$ zum Eigenwert 0. Ausserdem ist die Darstellungsmatrix von $B\big|_{V'}$ die JNF.

Somit ist $(w_{-2}, w_{-1}, Bv, v, w_3)$ die gesuchte Basis, für die B ihre Jordansche Normalform bekommt. Die Jordansche Normalform von B ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. a) Sei $A = J_{n,\lambda}$ ein Jordanblock der Grösse $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ gibt mit $B^2 = A$.
Hinweis: Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix B.
Lösung
Sei

$$A = J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass $B = b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ eine obere Dreiecksmatrix (also $b_{ij} = 0$ für $i > j$) mit $B^2 = A$ ist. Dann gelten folgende Bedingungen:

- Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt $\lambda = (B^2)_{ii} = \sum_{l=1}^n b_{il}b_{li} = b_{ii}^2$. Dies ist erfüllt für
$$b_{ii} = \sqrt{\lambda} = \lambda^{1/2} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$
- Für $1 \leq i \leq n-1$ gilt
$$1 = (B^2)_{i,i+1} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}b_{l,i+1} = \sum_{l=i}^{i+1} b_{il}b_{l,i+1} = b_{ii}b_{i,i+1} + b_{i,i+1}b_{i+1,i+1} = 2\sqrt{\lambda}b_{i,i+1}.$$
Dies ist erfüllt für
$$b_{i,i+1} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} = \lambda^{-1/2}\frac{1}{2} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n-1.$$
- Für $1 \leq i \leq n-2$ gilt
$$\begin{aligned} 0 = (B^2)_{i,i+2} &= \sum_{l=1}^{n} b_{il}b_{l,i+2} = \sum_{l=i}^{i+2} b_{il}b_{l,i+2} \\ &= b_{ii}b_{i,i+2} + b_{i,i+1}\underbrace{b_{i+1,i+2}}_{=b_{i,i+1}} + b_{i,i+2}\underbrace{b_{i+2,i+2}}_{=b_{ii}} = 2b_{ii}b_{i,i+2} + b_{i+1,i+2}. \end{aligned}$$
Dies ist erfüllt für
$$b_{i,i+2} = -\frac{1}{8\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda^{-5/2}}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-2.$$

- Für $1 \leq i \leq n-3$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = (B^2)_{i,i+3} &= \sum_{l=1}^{n} b_{il} b_{l,i+3} = \sum_{l=i}^{i+3} b_{il} b_{l,i+3} \\ &= b_{ii} b_{i,i+3} + b_{i,i+1} b_{i+1,i+3} + b_{i,i+2} b_{i+2,i+3} + b_{i,i+3} b_{i+3,i+3} \\ &= 2 b_{ii} b_{i,i+3} + 2 b_{i,i+1} b_{i,i+2}. \end{aligned}$$

  Dies ist erfüllt für

$$b_{i,i+3} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} 2 \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \frac{-1}{8\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{16\lambda^2\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda^{-5/2}}{3!} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-3.$$

Mit dieser Vorgehensweise können wir eine obere Dreiecksmatrix B konstruieren, die $B^2 = A$ erfüllt. Obige Rechnungen liefern die Matrix B explizit in Dimension $n \leq 4$. Für beliebige n hat die Matrix B folgende Form: Die Einträge von B sind

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i > j \\ \frac{\lambda^{\frac{1}{2}-(j-i)}}{(j-i)!} \prod_{l=1}^{j-i} \left(\frac{3}{2} - l\right) & \text{für } i \leq j \end{cases}$$

Alternativ betrachtet man die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda} & 1 \\ & & & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = J_{n,\sqrt{\lambda}}.$$

Man berechnte

$$C^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 2\sqrt{\lambda} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 2\sqrt{\lambda} & 1 \\ & & & \lambda & 2\sqrt{\lambda} \\ & & & & \lambda. \end{pmatrix}$$

Die Matrix C^2 hat als einzigen Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit n und geometrischer Vielfachheit 1. Somit ist C^2 ähnlich zum Jordanblock $J_{n,\lambda} = A$. Es gibt also ein invertierbares X mit

$$A = XC^2X^{-1} = (XCX^{-1})^2$$

und wir habe A wie gewünscht als Quadrat einer Matrix geschrieben.

b) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ gibt mit $B^2 = A$.

Lösung

Da A invertierbar ist, sind alle Eigenwerte ungleich 0. Wir wissen von Satz 7.1.8

aus dem Skript, dass A konjugiert ist zu der Matrix $J_{n_1,\lambda_1} \boxplus J_{n_2,\lambda_2} \boxplus \ldots \boxplus J_{n_r,\lambda_r}$ für gewisse $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Es existiert also ein invertierbares $X \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ mit $A = X\,(J_{n_1,\lambda_1} \boxplus J_{n_2,\lambda_2} \boxplus \ldots \boxplus J_{n_r,\lambda_r})\,X^{-1}$. Von Teilaufgabe a) wissen wir, dass es $B_1, B_2, \ldots, B_r$ gibt mit $B_i^2 = J_{n_i,\lambda_i}$ für alle $1 \leq i \leq r$. Insbesondere sehen wir aus der expliziten Darstellung in a), dass diese Matrizen B_i obere Dreiecksmatrizen mit $\sqrt{\lambda} \neq 0$ auf der Diagonalen und somit invertierbar sind. Definiere

$$B = X \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} X^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Da B_i für $1 \leq i \leq r$ und X invertierbar sind, ist auch B invertierbar. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} B^2 &= X \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}^2 X^{-1} = X \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^2 \end{pmatrix} X^{-1} \\ &= X \begin{pmatrix} J_{n_1,\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r,\lambda_r} \end{pmatrix} X^{-1} = A \end{aligned}$$

wie gewünscht.

4. Sei A eine symmetrische positiv-definite reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass eine eindeutige reelle symmetrische Matrix B existiert mit $\exp(B) = A$.

Lösung

Zunächst zur Eindeutigkeit: Falls B existiert, wähle mit dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q, sodass $Q^{-1}BQ$ diagonal ist mit Diagonaleinträgen $\mu_k \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}\right) Q = \sum_{k\geq 0} \frac{(Q^{-1}BQ)^k}{k!} = \exp(Q^{-1}BQ)$$

diagonal mit Diagonaleinträgen $\lambda_k := e^{\mu_k}$. Also ist der Eigenraum von B zu jedem Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$ gleich dem Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda := e^{\mu}$. Daraus folgt die Eindeutigkeit von B.

Die so gefundene Beschreibung von B können wir umgekehrt zur Konstruktion von B benutzen, nämlich: Wähle nach dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q mit $Q^{-1}AQ$ diagonal mit Diagonaleinträgen $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Da A positiv definit ist, gilt dann $\lambda_k > 0$ und es existieren eindeutige $\mu_k \in \mathbb{R}$ mit $e^{\mu_k} = \lambda$. Für die symmetrische Matrix $B := Q \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot Q^{-1}$ gilt somit

$$\exp(B) = Q \cdot \exp\big(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) \cdot Q^{-1} = Q \cdot \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \cdot Q^{-1} = A\,.$$

5. Es sei $V = M_{2,2}(\mathbf{C})$. Zeigen Sie, dass folgenden Matrizen Basen von V bilden, und berechnen Sie die entsprechenden Dualbasen.

a)

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung

Wir zeigen zuerst, dass B linear unabhängig (über $\mathbb{C}$) ist. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_4 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 - \alpha_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Somit ist B linear unabhängig. Da $\dim(V) = 4$ ist, ist B somit eine Basis von V.
Die Dualbasis von $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ist $B^* = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, wobei die linearen Funktionen $\lambda_i : V \to \mathbb{C}$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$\langle \lambda_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Die Funktion λ_1 ist von der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \eta_1 a + \eta_2 b + \eta_3 c + \eta_4 d$ für gewisse $\eta_i \in \mathbb{C}$. Die geforderten Bedingungen sind

$$\begin{cases} \eta_1 - \eta_4 = 1 \\ \eta_2 = 0 \\ \eta_3 = 0 \\ -\eta_1 - \eta_4 = 0 \end{cases}$$

Dies gibt $\eta_1 = \frac{1}{2}, \eta_2 = \eta_3 = 0, \eta_4 = -\frac{1}{2}$. Somit ist also

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a-d}{2}.$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= b \\ \lambda_3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= c \\ \lambda_4 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= -\frac{a+d}{2} \end{aligned}$$

Alternativ können wir Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ mit Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ identifizieren und erhalten

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

und als Dualbasis

$$B^* = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right).$$

b)

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \right).$$

Lösung
Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & i\alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_3 & (1+i)\alpha_4 \end{pmatrix}$$

folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Somit ist B linear unabhängig über $\mathbb{C}$ und wegen $\dim(V) = 4 = \dim(B)$ eine Basis von V.
Die duale Basis $B^* = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ von B berechnet man wie in a). Für λ_1 erhält man die Gleichungen

$$\begin{cases} \eta_1 + i\eta_2 = 1 \\ i\eta_1 = 0 \\ \eta_2 + \eta_3 = 0 \\ (1+i)\eta_4 = 0 \end{cases}$$

und somit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -ib + ic$$

Analog berechnen wir

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -ia + b - c$$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c$$

$$\lambda_4 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{d}{1+i}$$

6. Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V = \mathbf{K}^n$ und $A \in M_{n,n}(\mathbf{K})$ eine invertierbare Matrix.

a) Zeigen Sie, dass $B_1 = (Av_1, \ldots, Av_n)$ eine Basis von $\mathbf{K}^n$ ist.
Lösung
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass

$$0 = \alpha_1 Av_1 + \ldots + \alpha_n Av_n = A(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n)$$

gilt. Da A invertierbar ist, folgt daraus aber $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Da $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis ist, folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Somit ist B_1 linear unabhängig. Da $\dim(B_1) = n = \dim(V)$ ist, ist B_1 folglich eine Basis von V.

b) Sei $B^* = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Dualbasis von B. Berechnen Sie die Dualbasis von B_1, in Abhängigkeit von B^* und A.
Lösung
Wir zeigen zunächst folgende Charakterisierung der Dualbasis: Sei

$$M := (v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n)$$

die Matrixdarstellung von B bezüglich der Standardbasis $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{K}^n$, also $v_i = \sum_{l=1}^n (v_i)_l e_l$. Sei analog

$$M^* := (\lambda_1 \mid \lambda_2 \mid \ldots \mid \lambda_n)$$

die Matrixdarstellung von B^* bezüglich der Standardbasis $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ von $(\mathbb{K}^n)^*$ [das heisst $e_i^*(x) = x_i$ ist der i-te Eintrag von x], also $\lambda_i = \sum_{l=1}^n (\lambda_i)_l e_l^*$.
Dann gilt: B^* ist die Dualbasis von B genau dann, wenn ${}^t(M^*)M = 1_n$ gilt.
Wir wissen, dass B^* genau dann die Dualbasis von B ist, wenn $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$ ist. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}\lambda_i(v_j) &= \sum_{l=1}^n (\lambda_i)_l e_l^*(v_j) = \sum_{l=1}^n (\lambda_i)_l (v_j)_l = \sum_{l=1}^n (M^*)_{li} M_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n ({}^t(M^*))_{il} M_{lj} = ({}^t(M^*)M)_{ij}\end{aligned}$$

Somit ist B^* tatsächlich genau dann die Dualbasis von B, wenn ${}^t(M^*)M = 1_n$ ist. Die Annahme in der Aufgabe ist, dass B^* die Dualbasis von B ist. Somit gilt nach obiger Charakterisierung ${}^t(M^*)M = 1_n$. Nun wenden wir die Charakterisierung nochmals an mit B_1 und ihrer Darstellungsmatrix AM anstelle von B und M. Wir suchen also eine Matrix C mit ${}^tCAM = 1_n$. Dann ist dieses C die Darstellungsmatrix der gesuchten Dualbasis von B_1. Wir haben ${}^t(M^*)A^{-1}AM = {}^t(M^*)M = 1$. Es folgt, dass die gesuchte Matrix $C = {}^t({}^t(M^*)A^{-1}) = {}^t(A^{-1})M^*$ ist.

7. Sei $V = \mathbf{R}^3$ und $W \subset V$ das Erzeugnis von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Dimension von W.
Lösung
Da v_1 und v_2 linear unabhängig sind, ist $\dim(W) = 2$.

b) Berechnen Sie eine Basis vom orthogonalen Komplement von W im Dualraum V^*.
Lösung
Das orthogonale Komplement von W in V^* ist per Definition

$$W^\perp = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}.$$

Folglich ist $\lambda \in W^\perp$ genau dann, wenn $\left\langle \lambda, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = \eta_1 a + \eta_2 b + \eta_3 c$ die Bedingungen

$$0 = \langle \lambda, v_1\rangle = \left\langle \lambda, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \eta_1 - 2\eta_2 - \eta_3$$

$$0 = \langle \lambda, v_2\rangle = \left\langle \lambda, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 2\eta_1 + \eta_2 + 3\eta_3$$

erfüllt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3$ ist. Somit ist $W^\perp$ ein eindimensionaler Unterraum von V^*, der von λ gegeben als $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b - c$ erzeugt wird. Somit ist $B = (\lambda)$ eine Basis von $W^\perp$.

8. Sei W ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $f \in \mathrm{End}(W)$ ein Endomorphismus von W. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn λ ein Eigenwert der transponierten ($=$ dualen) Abbildung ${}^t f$ ist.
Lösung
Wir erinnern uns, dass die Zuordnung $f \mapsto {}^t f$ linear ist und dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn ${}^t f$ ein Isomorphismus ist. Damit gilt ${}^t(f - \lambda\,\mathrm{id}_W) = {}^t f - \lambda\,\mathrm{id}_W^* = {}^t f - \lambda\,\mathrm{id}_{W^*}$. Da W und W^* endlich-dimensional sind, ist eine lineare Abbildung $W \to W$ bzw. $W^* \to W^*$ genau dann bijektiv, wenn sie injektiv ist. Sei nun $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, d. h. sei die Abbildung $f - \lambda\,\mathrm{id}_W$ nicht injektiv. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie nicht bijektiv ist. Dies tritt genau dann ein, wenn ${}^t(f - \lambda\,\mathrm{id}_W) = {}^t f - \lambda\,\mathrm{id}_{W^*}$ nicht bijektiv ist, also genau dann wenn ${}^t f - \lambda\,\mathrm{id}_{W^*}$ nicht injektiv ist. Das ist aber die Bedingung dafür, dass λ Eigenwert von ${}^t f$ ist.

b) Sei $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Dann gilt: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.
Lösung
Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f und v ein zugehöriger Eigenvektor. Wir halten

zunächst fest, dass $f^i(v) = \lambda^i v$ für alle $i \geq 0$ gilt. Sei $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom der Form $p(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Dann gilt $p(f)(v) = (\sum_{i=0}^n a_i f^i)(v) = \sum_{i=0}^n a_i f^i(v) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i v = (\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i)v = p(\lambda)v$, also ist $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(f)$.