Serie 12

1. Sei $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Raum und sei

$$g : V \longrightarrow V^* \quad \text{gegeben durch } v \mapsto (g(v) : w \mapsto \langle w|v \rangle) \, .$$

a) Zeigen Sie, dass g ein Isomorphismus ist. Wir bezeichnen mit $h \colon V^* \to V$ die Umkehrabbildung von g.
Zeigen Sie, dass für $\lambda \in V^*$ und $v \in V$ gilt

$$\langle h(\lambda)|v \rangle = \langle \lambda, v \rangle.$$

Lösung
Zunächst einmal ist die Abbildung g linear, da das Skalarprodukt linear ist: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, w \in V$ gilt

$$g(\alpha v_1 + v_2)(w) = \langle w \mid \alpha v_1 + v_2 \rangle = \alpha \langle w|v_1 \rangle + \langle w|v_2 \rangle = (\lambda g(v_1) + g(v_2))\,(w).$$

Injektivität: Sei $v \in V$ mit $g(v) = 0_{V^*}$, also $\langle w|v \rangle = 0$ für alle $w \in W$. Insbesondere gilt also $\langle v|v \rangle = 0$. Wegen positiver Definitheit folgt $v = 0$.
Surjektivität: Sei $\lambda \in V^*$. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine geordnete Orthonormalbasis von V. Definiere $x := \sum_{i=1}^n \langle \lambda, e_i \rangle e_i$. Dann gilt

$$g(x)(e_j) = \langle e_j|x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda, e_i \rangle \underbrace{\langle e_j|e_i \rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle \lambda, e_j \rangle = \lambda(e_j)$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Somit ist $g(x) = \lambda$ und folglich ist g surjektiv.
Für $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\langle h(\lambda)|e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \langle \lambda, e_i \rangle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i|e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle \lambda, e_j \rangle,$$

was die Identität beweist.

b) Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie, dass die Dualbasis $B^* = (g(v_1), \dots, g(v_n))$ ist.
Lösung
Für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$g(v_i)(v_j) = \langle v_j|v_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Dies ist gerade die Charakterisierung einer Dualbasis.

c) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus auf V. Zeigen Sie, dass

$$h \circ {}^t f = f^* \circ h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V^*, V)$$

gilt, wobei f^* die adjungierte Abbildung ist.

Lösung

Wir müssen zeigen, dass

$$f^*(h(\lambda)) = h({}^t f(\lambda))$$

gilt für alle $\lambda \in V^*$, oder äquivalent dazu $g(f^*(h(\lambda))) = {}^t f(\lambda)$. Für alle v$\in V$ berechnen wir

$$\langle g(f^*(h(\lambda))), v\rangle = \langle f^*(h(\lambda))|v\rangle = \langle h(\lambda)|f(v)\rangle = \langle \lambda, f(v)\rangle = \langle {}^t f(\lambda), v\rangle$$

und das Resultat folgt.

d) Sei $W \subset V$ ein Unterraum. Seien

$$W^{\perp,\text{eukl}} = \{v \in V \mid \langle v|w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

und

$$W^{\perp,\text{dual}} = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

das orthogonale und das duale Komplement von W. Zeigen Sie, dass $g\left(W^{\perp,\text{eukl}}\right) = W^{\perp,\text{dual}}$ gilt

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}
g\left(W^{\perp,\text{eukl}}\right) &= g\left(\{v \in V \mid \langle v|w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}\right) \\
&= \{g(v) \in V^* \mid v \in V \text{ mit } \underbrace{\langle v|w\rangle}_{=\langle w|v\rangle = g(v)(w)} = 0 \text{ für alle } w \in W\} \\
&= \{g(v) \in V^* \mid \langle g(v), w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\} \\
&= \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\} \\
&= W^{\perp,\text{dual}},
\end{aligned}$$

wobei die zweitletzte Gleichheit gilt, da g nach a) ein Isomorphismus ist.

2. Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Sei $B'^* = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ die zu B' duale Basis von W^*. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f \colon V \to W$ gilt

$$\mathrm{Mat}(f; B, B') = \left(\ell_k(f(v_i))\right)_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le i \le n}}.$$

Lösung

Die Darstellungsmatrix $A := (a_{ij})_{ij} := \mathrm{Mat}(f; B, B')$ von f bezüglich B und B' ist definiert durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\Phi_B"] & K^m \arrow[d, "\Phi_{B'}"] \\ V \arrow[r, "f"] & W, \end{tikzcd}$$

wobei $\Phi_B, \Phi_{B'}$ die von den geordneten Basen B bzw. B' induzierten Abbildungen sind. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n und sei $(e'_1, \ldots, e'_m)$ die Standardbasis von K^m. Für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$f(v_i) = f(\Phi_B(e_i)) = \Phi_{B'}(f_A(e_i)) = \Phi_{B'}(Ae_i) = \Phi_{B'}(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$$

und damit für alle $k = 1, \ldots, m$ auch

$$\ell_k(f(v_i)) = \sum_j a_{ji} \underbrace{\ell_k(w_j)}_{=\delta_{kj}} = a_{ki}\,.$$

3. Sei $U \subset V$ ein Unterraum. Betrachten Sie die linearen Abbildungen

$$i\colon U \to V,\ u \mapsto u \quad \text{(Inklusion)}$$

$$\pi\colon V \to V/U,\ v \mapsto A_{U,v} \quad \text{(kanonische Projektion)}.$$

Zeigen Sie, dass die zu π transponierte Abbildung ${}^t\pi\colon (V/U)^* \to V^*$ ein Isomorphismus von $(V/U)^*$ auf den Kern der zu i transponierten Abbildung ${}^ti\colon V^* \to U^*$ ist.

Lösung
Wegen ${}^ti \circ {}^t\pi = {}^t(\pi \circ i) ={}^t 0 = 0$ ist $\mathrm{Bild}({}^t\pi) \subset \mathrm{Kern}({}^ti)$.

Für jedes Element $\lambda : V \to K$ in $\mathrm{Kern}(i^*)$ gilt $\lambda(v) = 0$ für alle $v \in U$, also $U \subset \mathrm{Kern}(\lambda)$. Nach Proposition 10.3.7 existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{\lambda} : V/U \to K$ mit $\tilde{\lambda} \circ \pi = \lambda$, also mit ${}^t\pi(\tilde{\lambda}) = \lambda$. Die Abbildung

$$\pi : (V/U)^* \to \mathrm{Kern}({}^ti)$$

ist somit surjektiv. Die Injektivität folgt aus der Surjektivität von $\pi : V \to V/U$, siehe Proposition 8.2.6 aus dem Skript.

4. Sei $V = \mathbb{R}[X]$. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ betrachten wir die Unterräume

$$W_n := \{P \in V \mid P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0\}$$

und

$$U_n := \{P \in V \mid \deg(P) \leq n\}$$

von V. Finden Sie einen Isomorphismus $V/U_n \to W_n$ und einen Isomorphismus $V/W_n \to U_n$.

Lösung
Definiere

$$f_1 : V \longrightarrow W_n \quad \text{durch} \quad a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_mx^m \mapsto a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_mx^m.$$

Nach Definition ist f_1 eine lineare surjektive Abbildung mit $\mathrm{Kern}(f_1) = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n\rangle = U_n$. Nach Proposition 10.3.2 existiert ein eindeutiger Isomorphismus $g_1 : V/U_n \to W_n$ mit $g_1 \circ p = f_1$. Dieses g_1 ist der gesuchte Isomorphismus.
Definiere

$$f_2 : V \longrightarrow U_n \quad \text{durch} \quad a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_mx^m \mapsto a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n.$$

Nach Definition ist f_2 eine lineare surjektive Abbildung mit $\mathrm{Kern}(f_2) = \langle x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^m\rangle = W_n$. Nach Proposition 10.3.2 existiert ein eindeutiger Isomorphismus $g_2 : V/W_n \to U_n$ mit $g_2 \circ p = f_2$. Dieses g_2 ist der gesuchte Isomorphismus.

5. Sei $V = \mathbb{R}^5$ und sei $W \subset V$ der Unterraum, der vom Vektor $f_1 = e_1 + \ldots + e_5$ erzeugt wird, wobei (e_i) die Standardbasis von $\mathbb{R}^5$ ist. Sei $g : V \to V$ die lineare Abbildung

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2+x_3+x_4+x_5 \\ x_1+x_3+x_4+x_5 \\ x_1+x_2+x_4+x_5 \\ x_1+x_2+x_3+x_5 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \end{pmatrix}.$$

a) Für $2 \le i \le 5$ definiere $f_i := e_1 - e_i$. Zeigen Sie, dass $B = (f_2, f_3, f_4, f_5)$ ein Unterraum W' von V erzeugt mit $W \oplus W' = V$.
Lösung
Wir wollen zuerst $W \cap W' = \{0\}$ zeigen. Sei also $v \in W \cap W'$. Dann gilt $v = \alpha_1 f_1 = \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 + \alpha_5 f_5$. für gewisse $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$. Wir haben also

$$v = \alpha_2(e_1-e_2)+\alpha_3(e_1-e_3)+\alpha_4(e_1-e_4)+\alpha_5(e_1-e_5) = (\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)e_1-\alpha_2e_2-\alpha_3e_3-\alpha_4e_4-\alpha_5e_5.$$

Auf der anderen Seite gilt

v $= \alpha_1 f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4 + \alpha_1 e_5$.Dies gibt uns die Bedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 \\ \alpha_1 &= -\alpha_2 \\ \alpha_1 &= -\alpha_3 \\ \alpha_1 &= -\alpha_4 \\ \alpha_1 &= -\alpha_5, \end{aligned}$$

die nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ erfüllt sind. Also ist $v = 0$ und somit $W \cap W' = \{0\}$ wie gewünscht.
Nun wollen wir noch zeigen, dass $W \cup W' = V$ gilt. Wir können $e_1, \dots, e_5$ schreiben als

$$e_1 = \frac{1}{5}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5)$$
$$e_i = \frac{1}{5}\left(f_1 - 4f_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{5} f_j \right)$$

Zeigen Sie, dass W und W' invariant unter g sind.
Lösung
Wir müssen zeigen, dass $g(W) \subset W$ und $g(W') \subset W'$ gilt. Wir berechnen $\mathrm{g(f_1)} =$

$$g\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\\4\end{pmatrix} = 4f_1 \in W$$
$$g(f_2) = g\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = -f_2 \in W'$$
$$g(f_3) = g\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = -f_3 \in W'$$
$$g(f_4) = g\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = -f_4 \in W'$$
$$g(f_5) = g\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = -f_5 \in W'.$$

Folglich sind W und W' invariant unter g.

Sei $V_1 = V/W$ und $p : V \to V_1$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $(p(f_2), \dots, p(f_5))$ eine Basis von V_1 ist. Berechnen Sie die Matrix des von g induzierten Endomorphismus von V_1.

Lösung
Wir prüfen zuerst lineare Unabhängigkeit von $p(f_2), \ldots, p(f_5)$. Seien dazu $\alpha_2, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \alpha_2 p(f_2) + \ldots + \alpha_5 p(f_5) = p(\alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_5 f_5).$$

Es folgt, dass $\alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_5 f_5 \in W$ ist. Da aber nach Definition von W' auch $\alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_5 f_5 \in W'$ ist und $W \cap W' = \{0\}$ ist, folgt $0 = \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_5 f_5 = (\alpha_2 + \ldots + \alpha_5)e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_5 e_5$ und somit $\alpha_2 = \ldots = \alpha_5 = 0$ wie gewünscht.
Wegen $\dim V_1 \dim (V/W) = \dim V - \dim W = 5 - 1 = 4$ ist $(p(f_2), , p(f_5))$ eine Basis von V_1.
Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & V \arrow[d, "p"] \\ V_1 = V/W \arrow[r, "\tilde{g}"] & V_1 = V/W \end{tikzcd}$$

Wir müssen berechnen, was der von g induzierte Endomorphismus $\tilde{g}$ mit den Basiselementen $p(f_i)$ für $2 \leq i \leq 5$ macht. Wir rechnen

$$\tilde{g}(p(f_i)) = p(g(f_i)) = p(-f_i) = -p(f_i)$$

für alle $2 \leq i \leq 5$, wobei wir $g(f_i) = -f_i$ aus Teilaufgabe c) benutzt haben. Somit ist $\tilde{g} = -\operatorname{Id}_{V_1} = -1_4$.

Für welche folgenden lineare Abbildungen $g_i : V \to E$ gibt es eine induzierte Abbildung $V/W \to E$?

- $E = \mathbf{R}$, $g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
- $E = \mathbf{R}^2$, $g_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$
- $E = \mathbf{R}[X]$, $g_3(x) = (x_2 - x_1)X^2 + (x_3 - 2x_2 + x_1)X - 4(x_4 - 3x_3 + 3x_4 - x_5)$
- $E = M_{2,2}(\mathbf{R})$, $g_4(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 \\ 2x_5 - x_4 - x_1 & x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_5 \end{pmatrix}$

Lösung
Nach Proposition 10.3.7 müssen wir jeweils prüfen, ob $W \subset \operatorname{Kern}(g_i)$ ist, also ob $g_i(f_1) = 0$ ist.

- Es ist $g_1(f_1) = g_1(e_1 + \ldots + e_5) = 5 \neq 0$ und somit existiert keine induzierte Abbildung $V/W \to E$.
- Es ist $g_2(f_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also existiert eine induzierte Abbildung $V/W \to E$.
- Es ist $g_3(f_1) = 0X^2 + 0X + 0 = 0$, also existiert eine induzierte Abbildung $V/W \to E$.
- Es ist $g_4(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \neq 1_2$, also existiert keine induzierte Abbildung $V/W \to E$.