Serie 13

1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Definieren Sie ein Isomorphismus $V \otimes \mathbb{K} \to V$.

Lösung

Definiere die bilineare Abbildung

$$\varphi : V \times \mathbb{K} \to V \quad \text{durch} \quad (v,k) \mapsto kv.$$

Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(V \otimes \mathbb{K}, V)$ mit $f(v \otimes k) = \varphi(v,k) = kv$. Wir wollen zeigen, dass f bijektiv ist. Zunächst einmal ist f surjektiv, da jedes $v \in V$ wegen $f(v \otimes 1) = v$ im Bild von f liegt. Es bleibt noch Injektivität zu zeigen: Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und sei (1) eine Basis von $\mathbb{K}$. Sei $x = \sum_{i=1}^n k_i v_i \otimes 1$ im Kern von f. Dann gilt

$$0 = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i \otimes 1\right) = \sum_{i=1}^n f(v_i \otimes k_i) = \sum_{i=1}^n k_i v_i.$$

Da die v_i linear unabhängig sind, folgt $k_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Folglich ist $x = 0$, was die Injektivität beweist.

2. a) Seien V_1 und V_2 zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$f \colon V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1 \quad \text{mit} \quad f(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$$

für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gibt. (Hier bezeichnet das Tensorprodukt jeweils $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$.)

Lösung

Definiere zuerst die Funktion

$$\phi : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2 \otimes V_1 \quad \text{durch} \quad (v_1, v_2) \mapsto v_2 \otimes v_1.$$

Man sieht leicht, dass diese Funktion bilinear ist. Wir haben also $\phi \in (V_1, V_2; V_2 \otimes V_1)$. Aus der Definition des Tensorprodukts wissen wir, dass es einen eindeutigen Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes V_2, V_2 \otimes V_1)$ gibt mit $f(v_1 \otimes v_2) = \phi(v_1, v_2) = v_2 \otimes v_1$. Um zu zeigen, dass dieses f ein Isomorphismus ist, konstruieren wir sein Inverses wie folgt: Definiere

$$\psi : V_2 \times V_1 \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \quad \text{durch} \quad (v_2, v_1) \mapsto v_1 \otimes v_2.$$

Analog wie vorhin erhalten wir ein eindeutiges $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_2 \otimes V_1, V_1 \otimes V_2)$ mit $g(v_2 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_2$. Auf allen reinen Tensoren gilt also $g \circ f = \mathrm{Id}_{V_1 \otimes V_2}$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_{V_2 \otimes V_1}$. Somit ist g das Inverse von f und die Abbildung f ist der gesuchte Isomorphismus.

b) Seien U, V und W drei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$f\colon (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W) \quad \text{mit} \quad f((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w)$$

für $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ gibt. (Wiederum ist $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$.)

Lösung

Definiere für alle $w \in W$ die (bilineare) Abbildung

$$\varphi_w : U \times V \to U \otimes (V \otimes W) \quad \text{durch} \quad (u, v) \mapsto u \otimes (v \otimes w).$$

Somit existiert für jedes $w \in W$ ein eindeutiger Homomorphismus $f_w \in \mathrm{Hom}(U \otimes V, U \otimes (V \otimes W))$ mit $f_w(u \otimes v) = \varphi_w(u, v) = u \otimes (v \otimes w)$.
Definiere nun die bilineare Abbildung

$$\varphi : (U \otimes V) \times W \to U \otimes (V \otimes W) \quad \text{durch} \quad (x, w) \mapsto f_w(x).$$

Nun existiert ein eindeutiger Homomorphismus

$$\begin{aligned} &f \in \mathrm{Hom}\left((U \otimes V) \otimes W, U \otimes (V \otimes W)\right) \quad \text{mit} \\ &f((u \otimes v) \otimes w) = \varphi(u \otimes v, w) = f_w(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes w). \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass dieses f bijektiv ist. Dazu konstruieren wir ein Inverses analog wie vorhin: Für alle $u \in U$ definiere die bilineare Abbildung

$$\psi_u : V \times W \to (U \otimes V) \otimes W \quad \text{durch} \quad (v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w.$$

Dies führt für jedes $u \in U$ zu einem Homomorphismus $g_u \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, (U \otimes V) \otimes W)$ mit $f_u(v \otimes w) = \psi_u(v, w) = (u \otimes v) \otimes w$.
Nun definieren wir die bilineare Abbildung

$$\psi : U \times (V \otimes W) \to (U \otimes V) \otimes W \quad \text{durch} \quad (u, x) \mapsto g_u(x).$$

Dies gibt einen eindeutigen Homomorphismus

$$\begin{aligned} &g \in \mathrm{Hom}(U \otimes (V \otimes W), (U \otimes V) \otimes W) \quad \text{mit} \\ &g(u \otimes (v \otimes w)) = \psi(u, v \otimes w) = g_u(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w. \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass g invers zu f ist. Somit ist f der gesuchte Isomorphismus.

3. Seien V_1 und V_2 endlich-dimensionale Vektorräume und $f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Tr}(f_1 \otimes f_2) = \mathrm{Tr}(f_1)\mathrm{Tr}(f_2)$$

gilt.

Lösung

Sei $n := \dim(V_1)$ und $m := \dim(V_2)$. Sei B_i eine Basis von V_i für $i = 1, 2$. Definiere $A := \mathrm{Mat}(f_1; B_1, B_1) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $B := \mathrm{Mat}(f_2; B_2, B_2) = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$. Dann gilt per definition $\mathrm{Tr}(f_1) = \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ und $\mathrm{Tr}(f_2) = \mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^m b_{ii}$. Die darstellende Matrix des Tensorprodukts ist

$$\mathrm{Mat}(f_1 \otimes f_2; B_1 \otimes B_2, B_1 \otimes B_2) = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(f_1 \otimes f_2) &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}(f_1 \otimes f_2; B_1 \otimes B_2, B_1 \otimes B_2)\right) = \mathrm{Tr}(A \otimes B) \\ &= a_{11}\,\mathrm{Tr}(B) + a_{22}\,\mathrm{Tr}(B) + \ldots + a_{nn}\,\mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\,\mathrm{Tr}(B) \\ &= \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(f_1)\,\mathrm{Tr}(f_2). \end{aligned}$$

4. Sei $V_1 = M_{2,2}(\mathbb{R})$ und $V_2 = \mathbb{R}^2$. Wir definieren $f_1 \colon V_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 \colon V_2 \to V_2$ durch

$$f_1(A) = \mathrm{Tr}(A), \qquad f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und (e_1, e_2) die Standardbasis von V_2.

Zeigen Sie, dass

$$B = (A_1 \otimes e_1, A_1 \otimes e_2, A_2 \otimes e_1, A_2 \otimes e_2, A_3 \otimes e_1, A_3 \otimes e_2, A_4 \otimes e_1, A_4 \otimes e_2)$$

eine geordnete Basis von $V_1 \otimes V_2$ ist, und dass

$$B' = (1 \otimes e_1, 1 \otimes e_2)$$

eine geordnete Basis von $\mathbb{R} \otimes V_2$ ist.

Berechnen Sie

$$\mathrm{Mat}(f_1 \otimes f_2; B, B').$$

Lösung

Wir zeigen zunächst, dass (A_1, A_2, A_3, A_4) eine geordnete Basis für V_1 ist. Seien also $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = 0$. Dann gilt

$$0 = aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = \begin{pmatrix} a + b & c \\ -d & a - b \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $a = b = c = d = 0$ ist. Folglich sind $A_1, \ldots, A_4$ linear unabhängig und bilden wegen $\dim(V_1) = 4$ somit auch eine Basis von V_1. Ausserdem ist (e_1, e_2) per Definition eine Basis von V_2. Aus Proposition 11.2.2 aus dem Skript folgt, dass B eine geordnete Basis von $V_1 \otimes V_2$ ist. Da (1) eine geordnete Basis von $\mathbb{R}$ ist, folgt aus derselben Proposition, dass B' eine geordnete Basis von $\mathbb{R} \otimes V_2$ ist.

Um die Matrix $\mathrm{Mat}(f_1 \otimes f_2; B, B')$ zu berechnen, bestimmen wir die Bilder der Basisvektoren von B unter $f_1 \otimes f_2$ und drücken diese in den Basiselementen von B' aus. Es gilt

$$(f_1 \otimes f_2)(A_i \otimes e_j) = f_1(A_i) \otimes f_2(e_j) = \mathrm{Tr}(A_i) \otimes f_2(e_j).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A_1) &= 2 \\
\mathrm{Tr}(A_2) &= 0 \\
\mathrm{Tr}(A_3) &= 0 \\
\mathrm{Tr}(A_4) &= 0 \\
f_2(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
f_2(e_2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
(f_1 \otimes f_2)(A_1 \otimes e_1) &= \mathrm{Tr}(A_1) \otimes f_2(e_1) = 2 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(1 \otimes e_1) + 2(1 \otimes e_2) \\
(f_1 \otimes f_2)(A_1 \otimes e_2) &= \mathrm{Tr}(A_1) \otimes f_2(e_2) = 2 \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2(1 \otimes e_1) + 4(1 \otimes e_2)
\end{aligned}$$

Alle anderen Bilder sind gleich 0, da die Spuren von A_2, A_3, A_4 verschwinden. Somit erhalten wir

$$\mathrm{Mat}(f_1 \otimes f_2; B, B') = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ können wir erst die einzelnen Darstellungsmatrizen berechnen und anschliessend ihr Kronecker-Produkt bilden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(f_1 \otimes f_2; B, B') &= \mathrm{Mat}(f_1; (A_1, A_2, A_3, A_4), 1) \otimes \mathrm{Mat}(f_2; (e_1, e_2), (e_1, e_2)) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. Seien V_1 und V_2 endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $n = \dim(V_2) \leq \dim(V_1)$. Zeigen Sie, dass jeder Tensor in $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren, aber im Allgemeinen nicht von $n - 1$ reinen Tensoren ist.

Lösung
Sei $\{b_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V_1 und sei $\{b'_1, \dots, b'_n\}$ eine Basis von V_2. Dann ist

$$\{\, b_i \otimes b'_j \mid i \in I,\, 1 \le j \le n\}$$

eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Jeder Vektor $v \in V_1 \otimes V_2$ lässt sich daher schreiben als

$$v = \sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_i \otimes b'_j$$

für eindeutige Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Mit $w_j := \sum_{i\in I} a_{ij} b_i \in V_1$ für alle j folgt

$$v = \sum_{j=1}^{n} w_j \otimes b'_j.$$

Also ist v eine Summe der n reinen Tensoren $w_1 \otimes b'_1, \dots, w_n \otimes b'_n$.

Wir müssen noch zeigen, dass ein Tensor existiert, welcher nicht die Summe von $n-1$ reinen Tensoren ist. Wegen $\dim(V_1) \ge \dim(V_2)$ können wir dabei $\{1, \dots, n\} \subset I$ annehmen.

Behauptung. Der Tensor $v := \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b'_i$ lässt sich nicht als Summe von $n-1$ reinen Tensoren schreiben.

Beweis. Sei angenommen $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i$ für Vektoren $v_i \in V_1$ und $w_i \in V_2$. Aus Dimensionsgründen existiert dann ein nicht-verschwindendes Element $\ell \in V_2^*$ mit $\ell(w_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n-1$. Es folgt

$$(\mathrm{Id}_{V_1} \otimes \ell)(v) = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathrm{Id}_{V_1} \otimes \ell)(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \cdot \underbrace{\ell(w_i)}_{=0} = 0,$$

also auch

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \ell(b'_i) = (\mathrm{Id}_{V_1} \otimes \ell)(v) = 0.$$

Da $b_1, \dots, b_m$ linear unabhängig sind, folgt $\ell(b'_i) = 0$ für alle i, also $\ell = 0$ im Widerspruch zur Annahme. $\square$

6. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für alle K-Vektorräume V und W existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus

$$\Phi\colon V^* \otimes_K W \to \mathrm{Hom}_K(V, W) \quad \text{mit} \quad \ell \otimes w \mapsto (v \mapsto \ell(v) \cdot w)$$

Lösung
Betrachte die Abbildung

$$\varphi : V^* \times W \to \mathrm{Hom}_K(V, W),\ (\ell, w) \mapsto (v \mapsto \ell(v) \cdot w).$$

Durch direktes Nachprüfen zeigt man, dass φ bilinear ist. Folglich erhält man aus der Definition des Tensorproduktes $(V^* \otimes_K W, b_0)$ eine lineare Abbildung

$$\Phi\colon V^* \otimes_K W \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

mit $\Phi \circ b_0 = \varphi$, also mit $\Phi(\ell \otimes w) = \varphi(\ell, w) = (v \mapsto \ell(v) \cdot w)$.

Wir zeigen, dass Φ injektiv ist: Sei $\{\ell_i\}_{i \in I}$ eine Basis von V^* und sei $\{b_j\}_{j \in J}$ eine Basis von W. Dann bildet

$$\left\{ \ell_i \otimes b_j \;\middle|\; i \in I,\, j \in J \right\}$$

eine Basis von $V^* \otimes W$. Jedes Element $v \in V^* \otimes W$ lässt sich folglich schreiben als

$$v = \sideset{}{'}\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{ij} \ell_i \otimes b_j = \sideset{}{'}\sum_{j \in J} \lambda_j \otimes b_j$$

mit Koeffizienten $a_{ij} \in K$ und mit $\lambda_j := \sum_{i \in I}{}' a_{ij} \ell_i$. (Der Strich bei der Summe bedeutet, dass es eine endliche Summe ist, also alle bis auf endlich viele der Summanden seien gleich 0.)

Sei nun $x \in \mathrm{Kern}(\Phi)$ ein beliebiges Element und schreibe $x = \sum'_{j \in J} \lambda_j \otimes b_j$ für gewisse $\lambda_j \in V^*$. Dann gilt für alle $v \in V$

$$0 = \Phi(x)(v) = \sideset{}{'}\sum_{j \in J} \lambda_j(v) b_j.$$

Da $\{b_j\}_{j \in J}$ eine Basis von W bildet, folgt aus der linearen Unabhängigkeit $\lambda_j(v) = 0$ für alle $j \in J$ und alle $v \in V$. Also gilt auch $\lambda_j = 0$ für alle j und somit ist $x = 0$. Folglich ist Φ injektiv.

b) Das Bild von Φ ist der Unterraum aller linearer Abbildungen $V \to W$ mit endlichem Rang.

Lösung
Für jedes Basiselement $\ell_i \otimes b_j$ von $V^* \otimes W$ ist das Bild der Abbildung

$$\Phi(\ell_i \otimes b_j)\colon V \to W,\; v \mapsto \ell_i(v) \cdot b_j$$

in $\langle\, b_j \,\rangle$ enthalten. Die Abbildung $\Phi(\ell_i \otimes b_j)$ hat also Rang $\leq\ 1$.
Sei $v \in V^* \otimes W$ ein beliebiges Element. Da v eine (endliche) Linearkombination von Basisvektoren ist, ist wegen der Linearität von Φ folglich $\Phi(v)$ eine Linearkombination von Bildern von Basisvektoren, also von linearen Abbildungen $g_1, \ldots, g_n : V \to W$ vom Rang ≤ 1. Wegen

$$\mathrm{Bild}(\Phi(v)) \subset \big\langle\, \mathrm{Bild}(g_1), \ldots, \mathrm{Bild}(g_n) \big\rangle$$

ist somit $\mathrm{Rang}(\Phi(v)) \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\mathrm{Rang}(g_i)}_{\leq 1} \leq n < \infty$.

Umgekehrt sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlichem Rang. Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und erweitere dies zu einer Basis $\{b_i\}_{i\in I}$ von W. Für jedes $1 \le i \le n$ sei weiter $\lambda_i \in W^*$ die eindeutige Linearform mit

$$\lambda_i(b_j) = \delta_{ij} \qquad \text{für alle } j \in I.$$

Insbesondere gilt dann $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i(w) b_i$ für alle $w \in \mathrm{Bild}(f)$.

Behauptung. $\Phi(\sum_{i=1}^n {}^t f(\lambda_i) \otimes b_i) = f$.
Beweis. Für alle $v \in V$ ist

$$\begin{aligned}\Phi\Big(\sum_{i=1}^n {}^t f(\lambda_i) \otimes b_i\Big)(v) &= \sum_{i=1}^n \Phi({}^t f(\lambda_i) \otimes b_i)(v) \\ &= \sum_{i=1}^n {}^t f(\lambda_i)(v) \cdot b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(f(v)) \cdot b_i = f(v)\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt wegen obiger Bemerkung und $f(v) \in \mathrm{Bild}(f)$ folgt. □

c) Die Abbildung Φ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlich-dimensional ist.

Lösung
Falls W endlich-dimensional ist, hat jede Abbildung $f : V \to W$ endlichen Rang. Wegen (b) ist Φ daher surjektiv. Wegen (a) ist aber Φ auch injektiv und somit ein Isomorphismus.
Im Fall V endlich-dimensional gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \le \dim(V) < \infty$, also $\mathrm{Rang}(f) < \infty$ für alle Homomorphismen $f : V \to W$. Mit (b) ist also Φ surjektiv und somit wie vorher ein Isomorphismus.

Sei umgekehrt angenommen, dass V und W beide nicht endlich-dimensional ist. Wir zeigen, dass Φ nicht surjektiv ist, indem wir ein Homomorphismus $f : V \to W$ von unendlichem Rang konstruieren:
Sei $\{b_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V und sei $\{b'_j\}_{j\in J}$ eine Basis von W. Da die Mengen I und J jeweils unendlich viele Elemente haben, existiert eine Abbildung $u : I \to J$, sodass $\{u(i) \mid i \in I\}$ unendlich viele Elemente hat. Definiere eine lineare Abbildung $f : V \to W$ durch die Vorschrift

$$f(b_i) = b'_{u(i)} \qquad \text{für alle } i \in I.$$

Wegen $b'_{u(i)} \in \mathrm{Bild}(f)$ für alle $i \in I$ enthält $\mathrm{Bild}(f)$ unendlich viele Basisvektoren, hat also unendliche Dimension. Es folgt, dass f von unendlichen Rang ist.

7. Sei V ein Vektorraum mit Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ und sei

$$t := \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} b_i \otimes b_j = \sum_{i,j}^n \alpha'_{ij} b'_i \otimes b'_j$$

für eindeutige Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in K$ ein Element in $V \otimes_K V$. Was ist die Beziehung zwischen

$$A := (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{und} \quad A' := (\alpha'_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

in Termen von $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}; B, B')$?

Lösung
Mit $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}; B, B') = (m_{ij})_{i,j}$ ist $b_i = \sum_{k=1}^n m_{ki} b'_k$ für alle i. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}\, b_i \otimes b_j &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \Big(\sum_{k=1}^n m_{ki} b'_k \Big) \otimes \Big(\sum_{\ell=1}^n m_{\ell j} b'_\ell \Big) \\
&= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j}\, b'_k \otimes b'_\ell \\
&= \sum_{k,\ell=1}^n \Big(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j} \Big) b'_k \otimes b'_\ell \,.
\end{aligned}$$

Da $\{b_i \otimes b_j \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ eine Basis von $V \otimes V$ bildet, folgt für alle k, ℓ

$$\alpha'_{k\ell} = \sum_{i,j} m_{ki} \alpha_{ij} m_{\ell j},$$

also $A' = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}; B, B') \cdot A \cdot {}^t\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}; B, B')$.