Serie 2

1. Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Produkt von Transpositionen. Lesen Sie daraus das Signum der jeweiligen Permutation ab.

a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

2. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation, also

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ein Tupel $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i < j$ heisst *Fehlstand* von σ, falls $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist.
Die Fehlstände von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ sind zum Beispiel die Tupel $(1, 2), (1, 4)$ und $(3, 4)$.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage:
Das Signum von $\sigma \in S_n$ kann berechnet werden als $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r$, wobei r die Anzahl Fehlstände von σ bezeichnet.

b) Prüfen Sie die berechneten Signa in Aufgabe 5 aus Serie 1 nach, indem Sie die Fehlstände der jeweiligen Permutationen zählen.

3. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit der Leibniz Formel (Proposition 3.6.11 aus dem Skript).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 13 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Benutzen Sie die Leibniz Formel (Proposition 3.6.11 aus dem Skript) um die folgenden Eigenschaften von Determinanten (nochmals) zu beweisen. Die Eigenschaften des Signums (Definition 3.6.6) dürfen hierfür vorausgesetzt werden.

a) Für alle $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\det({}^tA) = \det(A)$.

b) Für alle $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

5. Sei $V := \mathbb{R}^5$. Seien $v_1 := (0,1,0,-1,0), v_2 := (5,-2,3,0,1), v_3 := (2,0,3,0,-1), v_4 := (3,0,0,-2,2)$ Vektoren in V. Wir definieren Unterräume $V_1, V_2 \in V$ durch $V_1 := \langle v_1, v_2 \rangle$ und $V_2 := \langle v_3, v_4 \rangle$. Berechnen Sie $\dim(V_1 + V_2)$ und bestimmen Sie den Vektorraum $V_1 + V_2$.

6. Es seien V_1 und V_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^7$ mit $\dim V_1 = 2$ und $\dim V_2 = 4$. Welche Zahlenpaare (p, q) können als Dimensionen der Räume $V_1 + V_2$ und $V_1 \cap V_2$ auftreten?

7. Sei $V := \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten. Sei $V_1 := \{f \in V \mid f(-x) = f(x)\}$ der Unterraum der geraden Funktionen und $V_2 := \{f \in V \mid f(-x) = -f(x)\}$ derjenige der ungeraden Funktionen. Zeigen Sie, dass $V_1 \oplus V_2 = V$ ist.