Serie 3

1. Sei V ein Vektorraum. Man nennt eine lineare Abbildung $P : V \to V$ eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt. Zeigen Sie:

a) Der Kern und das Bild einer Projektion sind komplementär, also $\mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P) = V$.

b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ komplementäre Unterräume. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \to V$ mit $\mathrm{Kern}(P) = W_1$ und $\mathrm{Bild}(P) = W_2$.

c) Das Bild von P ist ein Eigenraum von P.

d) Das Spektrum von P ist entweder $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ oder $\{0,1\}$ (in welchem Fall ist das Spektrum leer? gleich $\{0\}$? gleich $\{1\}$?)

2. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$ für alle $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

b) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ für alle $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

c) $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)^{-1}$ für alle $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

d) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale. Dann kann man die Spur von allen Potenzen A^r mit $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ unabhängig von den nicht-diagonalen Einträgen von A berechnen.

3. Beweisen oder wiederlegen Sie, ob folgende Paare von Matrizen über dem angegebenen Körper K ähnlich sind:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$

b) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$

c) $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$

d) $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

4. Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei $V := \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten von Grad kleiner gleich n. Berechnen Sie die Spur und die Determinante der folgenden Endomorphismen:

a) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben als $f(p) = p'$, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

b) Sei $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch $g(p) = 4p''' - 2p'' + 7p' + 2p$, wobei r Striche die r-te Ableitung bezeichnen.

c) Sei $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch $h(p) = xp' - p$.

6. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, $V = \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Definiere

$$W := \{v \in V \mid \exists\, r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ mit } (A - \lambda 1_n)^r v = 0\} \subset V.$$

Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$ ist.

Sei $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, die mit A kommutiert. Zeigen Sie, dass W ein für B invarianter Unterraum von V ist.
Bemerkung: W heisst Hauptraum zum Eigenwert λ (engl: generalized eigenspace) und die Elemente $v \in W$ heissen Hauptvektoren (engl: generalized eigenvectors). Diese Begriffe werden später in der Vorlesung eine wichtige Rolle beim Bestimmen der Jordanschen Normalform spielen.

7. Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ ähnliche Matrizen. Sei $X \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix mit $B = XAX^{-1}$. Sei $W \subset \mathrm{K}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass W genau dann invariant unter A ist, wenn $X(W)$ invariant unter B ist.