Serie 4

1. Es sei $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2-Matrix. Finde Bedingungen an a, b, c, d, so dass die Matrix D

a) 2 verschiedene,

b) genau einen oder

c) keinen reellen Eigenwert hat.

2. Für $\alpha \in R$ sei A_α die reelle 4×4-Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

a) Für welche $\alpha \in R$ ist A_α invertierbar?

b) Berechne die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

c) Berechne $\det A_\alpha$ und vergleiche die Zahl mit dem Produkt der Eigenwerte von A_α (inklusive Vielfachheiten).

3. Bestimmen Sie die die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Endomorphismen. Was lässt sich über die algebraische und geometrische Vielfachheit sagen?

a) A $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

b) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus und $\mathcal{B}$ eine Basis von V, in der

$$\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } a_{16}, \ldots, a_{66} \in \mathbb{R}.$$

4. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfen Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{C})$

b) $B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$

6. Zeigen Sie: Jedes Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$$

mit $n \geq 1$ ist charakteristisches Polynom einer Matrix in $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Hinweis: Betrachten Sie eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Skalaren in der letzten Zeile.

Bemerkung: Die so erhaltene Matrix A heisst *Begleitmatrix* des Polynoms P.

7. Sei V ein K-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ und $G(v) \neq 0$ ist, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

b) Ist V endlich dimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

c) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu b) an, falls V nicht endlich dimensional ist.