Serie 5

1. Der Satz von Cayley-Hamilton besagt Folgendes:
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\mathrm{char}_f(t)$. Dann gilt $\mathrm{char}_f(f) = 0$.

a) Beweisen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für diagonalisierbare Endomorphismen.

b) Eine Matrix $N \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{C})$ heisst *nilpotent*, falls es ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gibt, sodass $N^k = 0$ ist. Zeigen Sie, dass eine Matrix $N \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ genau dann nilpotent ist, wenn 0 der einzige Eigenwert von N ist (über $\mathbb{C}$).

2. a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V = \mathbb{K}^{2n}$ für ein $n \in Z_{\geq 1}$. Wir definieren eine Funktion

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

durch

$$b(v,w) := \sum_{i=1}^{n} (v_{2i-1}w_{2i} - v_{2i}w_{2i-1}) = v_1w_2 - v_2w_1 + \ldots + v_{2n-1}w_{2n} - v_{2n}w_{2n-1},$$

für alle $v = (v_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ und $w = (w_i)_{1 \leq i \leq 2n}$.
Zeigen Sie, dass b eine Bilinearform auf V ist.
Ist b symmetrisch?
Ist b alternierend (also $b(v,v) = 0$ für alle $v \in V$)?

b) Prüfen Sie nach, dass die Funktion

$$b : M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA \cdot B)$$

eine positive Bilinearform auf den $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_{n,n}(\mathbb{R})$ definiert.

3. a) (Parallelogrammidentität)
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum. Zeigen Sie

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2\left(||v||^2 + ||w||^2\right) \text{ für alle } v, w \in V.$$

b) (Polarisationsformel)
Sei $(V, || \cdot ||)$ ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammidentität gilt. Zeigen Sie, dass

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{2}\left(||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert, das die gegebene Norm induziert.

4. Sei $V := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ der Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$. Prüfen Sie, dass

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.
Zeigen Sie ausserdem, dass die Menge $\{c_n, s_m \mid n \geq 0, m \geq 1\}$, wobei

$$c_0(x) := 1 \quad , \quad c_n(x) := \sqrt{2}\cos(nx) \text{ für } n \geq 1 \quad \text{und} \quad s_m(x) := \sqrt{2}\sin(mx) \text{ für } m \geq 1$$

eine orthonormale Teilmenge von V ist.

5. Seien f_1, f_2 und g stetige reell-wertige Funktionen auf einem gegebenen Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$). Sei zudem $g \geq 0$. Zeigen Sie die folgende Ungleichung:

$$\left|\int_a^b f_1(x)f_2(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b f_1(x)^2 g(x)dx\right)\left(\int_a^b f_2(x)^2 g(x)dx\right).$$

6. Betrachten Sie den Euklidischen Raum $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um aus den folgenden gegebenen geordneten Basen geordnete orthonormale Basen zu berechnen:

a) $\left(\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}\right)$

b) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$

7. Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben sei eine Ebene durch die Gleichung

$$2x - y + 4z = 0.$$

Finden Sie eine orthonormale Basis dieser Ebene.