Serie 6

1. Sei $V = \{p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \mid c_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten von Grad kleiner gleich 3. Sei $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3, p_4) \subset V$ definiert durch

$$p_1(x) = x \quad p_2(x) = x^2 + 2 \quad p_3(x) = x^3 + 2x + 1 \quad p_4(x) = x^3 + x^2 + x.$$

a) Verifizieren Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren sowohl auf die Standardbasis $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ als auch auf $\mathcal{B}$ bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

an, um orthonormale Basen $\tilde{\mathcal{E}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ zu finden. Prüfen Sie nach, ob ihr erhaltenes Resultat tatsächlich stimmt.

c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $M_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}}$ von $\tilde{\mathcal{E}}$ nach $\mathcal{E}$.

d) Können Sie die Transformationsmatrix $M_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}}$ für eine beliebige Basis $\mathcal{A}$ bestimmen, wobei $\tilde{\mathcal{A}}$ die ONB bezeichne, die man durch das Gram-Schmidt Verfahren erhält? Überprüfen Sie Ihre erhaltene Matrix $M_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}}$, indem Sie die Standardbasis $\mathcal{E}$ verwenden und mit Teilaufgabe c) vergleichen.

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine beliebige Orthonormalbasis von U.

b) Legen Sie mit Hilfe dieser Basis die Orthogonalprojektion auf U und die Orthogonalprojektion auf $U^\perp$ je durch ihre Koordinatenmatrizen bzgl. der kanonischen Basis fest.

c) Bestimmen Sie je ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsmenge U bzw. $U^\perp$.

3. Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Projektionen auf die Ebene $E_1 = \{x + 3y = 2z\}$ respektive $E_2 = \{x = y\}$. Geben Sie die Matrix von $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an!

4. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrizen der Orthogonalprojektionen $\mathbb{R}^3 \to U \subset \mathbb{R}^3$ auf U und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp \subset \mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ an bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus a).

5. Es sei $V = M_{n,n}(R)$ mit dem Standardskalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ ein Skalarprodukt auf V ist. Geben Sie ein Beispiel einer Orthonormalbasis von V an.

b) Sei $C \in V$ eine Matrix. Wir definieren $f\colon V \to V$ durch $f(A) = AC$. Zeigen Sie, dass f ein Endomorphismus von V ist, und bestimmen Sie die adjungierte Abbildung f^* bezüglich dem Skalarprodukt aus a).

6. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Wir definieren eine Matrix $B = {}^tAA$. Zeigen Sie, dass B symmetrisch ist, und dass $b(x,y) = {}^txBy$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

7. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und sei f ein Endomorphismus von V. Wir definieren einen Endomorphismus g von V durch $g = f^* \circ f$. Zeigen Sie, dass $\ker(g) = \ker(f)$ ist.