Serie 7

1. Berechnen Sie eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwenden Sie diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ zu lösen.

2. Sei $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ und $B = {}^tAA$.

a) Zeigen Sie, dass $b(x, y) = {}^txBy$ ein Skalarprodukt definiert falls A invertierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

3. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass ${}^txMx = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, und dass $b(x, y) = {}^txMy$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von M. Das heisst: Finden Sie eine obere Dreiecksmatrix $R \in M_{33}(\mathbb{R})$ mit positiven Diagonaleinträgen, sodass $M = {}^tRR$ gilt.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine reelle, symmetrische Matrix. Führen Sie für A eine Hauptachsentransformation durch, das heisst, bestimmen Sie eine orthogonale Matrix X und eine Diagonalmatrix D, sodass $D = X^{-1}AX$ gilt.
Hinweis: Alle Eigenwerte von A sind ganze Zahlen.

5. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei f ein invertierbarer Endomorphismus von V.

Für Teilaufgaben b), d) und e) nehmen wir ausserdem an, dass V ein euklidischer Raum und f orthogonal ist.

a) Zeigen Sie, dass t genau dann ein Eigenwert von f ist, wenn t^{-1} ein Eigenwert von f^{-1} ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Eigenwerte von f eine Teilmenge von $\{-1, 1\}$ ist.

c) Für eine reelle Zahl t sei $P(t) := \det(\mathrm{Id} - tf)$. Zeigen Sie, dass P ein Polynom von Grad $n = \dim(V)$ ist mit $P(0) = 1$.

d) Zeigen Sie, dass für alle $t \neq 0$ gilt

$$t^n P(1/t) = \det(-f)P(t),$$

wobei $n = \dim(V)$ ist.

e) Angenommen, n ist ungerade und $\det(f) = 1$. Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von f ist.

6. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und sei $W \subset V$ ein Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass eine Projektion p von V auf W genau dann selbst-adjungiert ist, wenn p die orthogonale Projektion ist.

b) Sei $i : W \to V$ die lineare Funktion gegeben durch $x \mapsto x$. Berechnen Sie die Adjungierte von i.

7. Sei $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine orthogonale 3×3 Matrix mit Determinante 1.

Zeigen Sie, dass es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass A ähnlich ist zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

8. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und sei $W \subset V$ ein Unterraum. Sei p die orthogonale Projektion von V auf W. Wir definieren eine lineare Abbildung $r : V \to V$ durch

$$r(v) = v - 2p(v).$$

a) Zeigen Sie, dass r eine orthogonale Transformation ist und berechnen Sie r^*.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Kern}(r - \mathrm{Id})$ und $\mathrm{Kern}(r + \mathrm{Id})$.

9. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_i \geq 0$ und nicht alle x_i sind gleich 0. Wir bezeichnen mit N die Zahl der $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_i \neq 0$.

Zeigen Sie, dass

$$N \geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

gilt.