Serie 8

1. Führen Sie eine Hauptachsentransformation mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch, das heisst finden Sie eine orthogonale Matrix X und eine Diagonalmatrix D, so dass $D = X^{-1}AX$ gilt.

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung des Endomorphismus $f = f_A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Welche der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit?

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ in n Variablen heisst *homogen vom Grad k*, falls

$$P(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k P(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeigen Sie, dass jede quadratische Form ein homogenes Polynom vom Grad 2 ist und dass umgekehrt jedes homogene Polynom vom Grad 2 eine quadratische Form ist.

5. Sei Q eine quadratische Form auf $V = \mathbb{R}^n$ und sei b die dazugehörige Bilinearform. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Seien $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $t_1, \ldots, t_{p+q} \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$Q(x) = t_1 y_1^2 + \cdots + t_p y_p^2 - t_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - t_{p+q} y_{p+q}^2$$

gilt für

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \in V \quad \text{mit } y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren

$$p' := \max\{\dim(W) \mid W \subset V \text{ so dass } b|_{W \times W} \text{ ein Skalarprodukt ist}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $p' \geq p$ gilt.

b) Sei $W \subset V$ ein Unterraum der Dimension $\dim(W) \geq p + 1$. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in W \setminus \{0\}$ gibt, der eine Linearkombination von $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ ist und $Q(v) \leq 0$ erfüllt. Folgern Sie, dass $p' = p$ gilt.

6. Sei Q eine quadratische Form auf $V = \mathbb{R}^n$ und sei b die dazugehörige Bilinearform. Wir nehmen an, dass $Q \neq 0$ ist. Ziel dieser Aufgabe ist es ein einfaches Rezept anzugeben, mit dem man eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ finden kann, so dass

$$Q(x) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$$

gilt für

$$x = \sum_i y_i v_i \in V \quad \text{mit } y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in V$ mit $Q(v) = 1$ oder $Q(v) = -1$ gibt.

b) Sei $v \in V$ so, dass $Q(v) \in \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass der Raum $W = \{w \in V \mid b(w, v) = 0\}$ Dimension $n - 1$ hat.

c) Folgern Sie die Aussage per Induktion über n.

7. Sei V ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit Rang 1.

a) Zeigen Sie, dass es Vektoren $v_1, v_2 \in V \backslash \{0\}$ gibt, so dass

$$f(v) = \langle v | v_1 \rangle v_2$$

für alle $v \in V$.

b) Finden Sie die Singulärwertzerlegung von V bezüglich v_1 und v_2.

c) Was ist die Adjungierte von f?

d) Drücken Sie die Resultate von den Teilaufgaben a), b) und c) im Falle $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt mit Matrizen und Vektoren aus.

8. Sei V ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus von V.

Seien $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ geordnete Orthonormalbasen von V. Sei $r \leq n$ und seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$f(v) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \langle v | v_i \rangle w_i$$

die Singulärwertzerlegung von f ist.

a) Finden Sie eine Formel für f^* in Abhängigkeit von B_1 und B_2 und geben Sie die Singulärwertzerlegung von f^* an.

b) Beschreiben Sie den Kern von f^* und das Bild von f^* in Abhängigkeit von B_1 und B_2.

c) Beschreiben Sie eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von ff^*.

d) Berechnen Sie $||f(v)||^2$ in Abhängigkeit der Singulärwertzerlegung. Bestimmen Sie das Maximum und Minimum des Verhältnisses $\frac{||f(v)||^2}{||v||^2}$ für einen Vektor $v \in V \backslash \{0\}$.