# Serie 9

**1.** Sei $V = \mathbb{R}^n$ und sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Zeigen Sie, dass die Permutationsmatrix $P_\sigma$ orthogonal ist.

**2.** Lesen Sie die Beweise zum Gram-Schmidt Algorithmus (Satz 6.2.4), der Cholesky Zerlegung (Korollar 6.2.7) und der QR-Zerlegung (Proposition 6.5.6) aus Kapitel 6 im Skript und vergleichen Sie sie mit den Beweisen aus Kapitel 5 im reellen Fall.

**3.** Für welche der folgenden Matrizen ist die zugehörige Sesquilinearform hermitesch?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3+i \\ 2 & i & -2i \\ 3-i & 2i & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4+i & 7 \\ 4-i & -\pi & -2-8i \\ 7 & -2+8i & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1-i \\ 4 & 2 & 3 \\ -1+i & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

d) $D_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 2 & i & -ai \\ -i & 2-bi & 3 \\ ci & 3 & -4 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**4.** a) Berechnen Sie die Dimension des Raumes aller symmetrischen $n \times n$ Matrizen, also die Dimension von $\{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie die Dimension des Raumes aller hermiteschen $n \times n$ Matrizen, also die Dimension von $\{B \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{B} = B\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

**5.** Sei $g \in C([0,1])$ eine stetige Funktion von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle f_1 | f_2 \rangle := \int_0^1 \overline{f_1(x)} f_2(x) g(x) dx$$

ein komplexes Skalarprodukt auf den Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen $C([0,1])$ definiert.

**6.** Für welche der folgenden Matrizen ist die zugehörige Sesquilinearform ein komplexes Skalarprodukt?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 5 \\ i & 2 & -3i \\ 5 & 3i & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2+i & -5i \\ 2-i & 1 & -4 \\ 5i & -4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 0 \\ -2i & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -i \\ 2 & 4 & 2 \\ i & 2 & 7 \end{pmatrix}$

**7.** Sei $V$ ein unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

a) Zeigen Sie, dass es eindeutige selbstadjungierte $f_1, f_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gibt mit $f = f_1 + i f_2$.

b) Zeigen Sie, dass $f$ genau dann normal ist, wenn $f_1$ und $f_2$ wie in a) miteinander kommutieren.

**8.** Sei $V$ ein unitärer Raum. Zeigen Sie die folgende Polarisationsformel:

$$\langle w|v\rangle = \frac{1}{4}\left(\left(||v+w||^2 - ||v-w||^2\right) + i\left(||v+iw||^2 - ||v-iw||^2\right)\right)$$

für alle $v, w \in V$.