Serie 10

1. Sei V ein unitärer Vektorraum und seien f und g zwei normale Endomorphismen auf V.

a) Zeigen Sie, dass die Summe $f + g$ nicht immer normal ist.

b) Zeigen Sie: Falls f^* and g kommutieren, dann ist $f + g$ normal.

2. Betrachten Sie den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und den unitären Raum $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt. Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Weshalb?

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3i & 4-i \\ -3i & 2 & 6+2i \\ 4+i & 6-2i & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C})$

b) $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$

3. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ heisst *von endlicher Ordnung*, falls es ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $A^k = 1_n$ gibt. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass so eine Matrix immer diagonalisierbar ist.

Sei also A eine Matrix von endlicher Ordnung und k so, dass $A^k = 1_n$ ist. Wir bezeichnen mit $\langle x|y\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

a) Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ sei

$$b(x,y) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\langle A^j x | A^j y\rangle.$$

Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass A bezüglich des Skalarprodukts b unitär ist.

c) Folgern Sie, dass A diagonalisierbar ist. Gibt es immer eine Basis von Eigenvektoren die bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormal ist?

4. Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit $A^k = 1_n$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Zeigen Sie, dass dann sogar $A^2 = 1_n$ gilt.

6. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom jeder hermiteschen Matrix reelle Koeffizienten hat.

a) Mit Spektralsatz

b) Ohne Spektralsatz

7. Für $n \geq 1$ und einen beliebigen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten Sie den Jordanblock

$$A = J_{n,\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie A^k für alle $k \geq 0$.

b) Bestimmen Sie

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

8. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein Polynom $p(X)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

9. Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix A mit

$$A^2 + 2A + 5\,\mathrm{Id}_n = 0$$

genau dann, wenn n gerade ist.