Serie 11

1. Bestimmen Sie die zu den folgenden Matrizen gehörige Jordansche Normalform (JNF) in Abhängigkeit der Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & a & b \\ 0 & t & c \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$, wobei $t \in \mathbb{C}$ ist.

2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalformen der folgenden Matrizen sowie die zugehörigen Jordan-Basen von $\mathbb{C}^5$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & -8 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

3. a) Sei $A = J_{n,\lambda}$ ein Jordanblock der Grösse $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ gibt mit $B^2 = A$.

Hinweis: Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix B.

b) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ gibt mit $B^2 = A$.

4. Sei A eine symmetrische positiv-definite reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass eine eindeutige reelle symmetrische Matrix B existiert mit $\exp(B) = A$.

5. Es sei $V = M_{2,2}(\mathbf{C})$. Zeigen Sie, dass folgenden Matrizen Basen von V bilden, und berechnen Sie die entsprechenden Dualbasen.

a)

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

b)

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \right).$$

6. Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V = \mathbf{K}^n$ und $A \in M_{n,n}(\mathbf{K})$ eine invertierbare Matrix.

a) Zeigen Sie, dass $B_1 = (Av_1, \dots, Av_n)$ eine Basis von $\mathbf{K}^n$ ist.

b) Sei $B^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Dualbasis von B. Berechnen Sie die Dualbasis von B_1, in Abhängigkeit von B^* und A.

7. Sei $V = \mathbf{R}^3$ und $W \subset V$ das Erzeugnis von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Dimension von W.

b) Berechnen Sie eine Basis vom orthogonalen Komplement von W im Dualraum V^*.

8. Sei W ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $f \in \mathrm{End}(W)$ ein Endomorphismus von W. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn λ ein Eigenwert der transponierten (= dualen) Abbildung ${}^t f$ ist.

b) Sei $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Dann gilt: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.