Serie 12

1. Sei $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Raum und sei

$$g : V \longrightarrow V^* \quad \text{gegeben durch } v \mapsto (g(v) : w \mapsto \langle w|v \rangle)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass g ein Isomorphismus ist. Wir bezeichnen mit $h\colon V^* \to V$ die Umkehrabbildung von g.
Zeigen Sie, dass für $\lambda \in V^*$ und $v \in V$ gilt

$$\langle h(\lambda)|v \rangle = \langle \lambda, v \rangle.$$

b) Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie, dass die Dualbasis $B^* = (g(v_1), \ldots, g(v_n))$ ist.

c) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus auf V. Zeigen Sie, dass

$$h \circ {}^t f = f^* \circ h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V^*, V)$$

gilt, wobei f^* die adjungierte Abbildung ist.

d) Sei $W \subset V$ ein Unterraum. Seien

$$W^{\perp,\mathrm{eukl}} = \{v \in V \mid \langle v|w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

und

$$W^{\perp,\mathrm{dual}} = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

das orthogonale und das duale Komplement von W. Zeigen Sie, dass $g\left(W^{\perp,\mathrm{eukl}}\right) = W^{\perp,\mathrm{dual}}$ gilt

2. Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Sei $B'^* = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ die zu B' duale Basis von W^*. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt

$$M_{B,B'}(f) = \big(\ell_i(f(v_j))\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}\,.$$

3. Sei $U \subset V$ ein Unterraum. Betrachten Sie die linearen Abbildungen

$$i\colon U \to V,\ u \mapsto u \quad \text{(Inklusion)}$$

$$\pi\colon V \to V/U,\ v \mapsto A_{U,v} \quad \text{(kanonische Projektion).}$$

Zeigen Sie, dass die zu π transponierte Abbildung ${}^t\pi\colon (V/U)^* \to V^*$ ein Isomorphismus von $(V/U)^*$ auf den Kern der zu i transponierten Abbildung ${}^t i\colon V^* \to U^*$ ist.

4. Sei $V = \mathbb{R}[X]$. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ betrachten wir die Unterräume

$$W_n := \{P \in V \mid P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0\}$$

und

$$U_n := \{P \in V \mid \deg(P) \leq n\}$$

von V. Finden Sie einen Isomorphismus $V/U_n \to W_n$ und einen Isomorphismus $V/W_n \to U_n$.

5. Sei $V = \mathbb{R}^5$ und sei $W \subset V$ der Unterraum, der vom Vektor $f_1 = e_1 + \ldots + e_5$ erzeugt wird, wobei (e_i) die Standardbasis von $\mathbb{R}^5$ ist. Sei $g : V \to V$ die lineare Abbildung

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

a) Für $2 \leq i \leq 5$ definiere $f_i := e_1 - e_i$. Zeigen Sie, dass $B = (f_2, f_3, f_4, f_5)$ ein Unterraum W' von V erzeugt mit $W \oplus W' = V$.

b) Zeigen Sie, dass W und W' invariant unter g sind.

c) Sei $V_1 = V/W$ und $p : V \to V_1$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $(p(f_2), \ldots, p(f_5))$ eine Basis von V_1 ist. Berechnen Sie die Matrix des von g induzierten Endomorphismus von V_1.

d) Für welche folgenden lineare Abbildungen $g_i : V \to E$ gibt es eine induzierte Abbildung $V/W \to E$?

- $E = \mathbf{R}$, $g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
- $E = \mathbf{R}^2$, $g_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$
- $E = \mathbf{R}[X]$, $g_3(x) = (x_2 - x_1)X^2 + (x_3 - 2x_2 + x_1)X - 4(x_4 - 3x_3 + 3x_4 - x_5)$
- $E = M_{2,2}(\mathbf{R})$, $g_4(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 \\ 2x_5 - x_4 - x_1 & x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_5 \end{pmatrix}$