Serie 13

1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Definieren Sie ein Isomorphismus $V \otimes \mathbb{K} \to V$.

2. a) Seien V_1 und V_2 zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$f\colon V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1 \quad \text{mit} \quad f(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$$

für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gibt. (Hier bezeichnet das Tensorprodukt jeweils $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$.)

b) Seien U, V und W drei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$f\colon (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W) \quad \text{mit} \quad f((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w)$$

für $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ gibt. (Wiederum ist $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$.)

3. Seien V_1 und V_2 endlich-dimensionale Vektorräume und $f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Tr}(f_1 \otimes f_2) = \mathrm{Tr}(f_1)\mathrm{Tr}(f_2)$$

gilt.

4. Sei $V_1 = M_{2,2}(\mathbb{R})$ und $V_2 = \mathbb{R}^2$. Wir definieren $f_1\colon V_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2\colon V_2 \to V_2$ durch

$$f_1(A) = \mathrm{Tr}(A), \qquad f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und (e_1, e_2) die Standardbasis von V_2.

Zeigen Sie, dass

$$B = (A_1 \otimes e_1, A_1 \otimes e_2, A_2 \otimes e_1, A_2 \otimes e_2, A_3 \otimes e_1, A_3 \otimes e_2, A_4 \otimes e_1, A_4 \otimes e_2)$$

eine geordnete Basis von $V_1 \otimes V_2$ ist, und dass

$$B' = (1 \otimes e_1, 1 \otimes e_2)$$

eine geordnete Basis von $\mathbb{R} \otimes V_2$ ist.

Berechnen Sie

$$\mathrm{Mat}(f_1 \otimes f_2; B, B').$$

5. Seien V_1 und V_2 endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $n = \dim(V_2) \leq \dim(V_1)$. Zeigen Sie, dass jeder Tensor in $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren, aber im Allgemeinen nicht von $n-1$ reinen Tensoren ist.

6. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für alle K-Vektorräume V und W existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus

$$\Phi\colon V^* \otimes_K W \to \mathrm{Hom}_K(V, W) \quad \text{mit} \quad \ell \otimes w \mapsto (v \mapsto \ell(v) \cdot w)$$

b) Das Bild von Φ ist der Unterraum aller linearer Abbildungen $V \to W$ mit endlichem Rang.

c) Die Abbildung Φ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlichdimensional ist.

7. Sei V ein Vektorraum mit Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ und sei

$$t := \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} b_i \otimes b_j = \sum_{i,j}^{n} \alpha'_{ij} b'_i \otimes b'_j$$

für eindeutige Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in K$ ein Element in $V \otimes_K V$. Was ist die Beziehung zwischen

$$A := (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{und} \quad A' := (\alpha'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

in Termen von $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}; B, B')$?