Serie 10

1. a) Für welche $s > 0$ ist
$$\int_a^b \frac{1}{x^s} dx < \infty \ ,$$
für $(a, b) = (0, 1), (1, \infty), (0, \infty)$?

b) Die Gammafunktion ist definiert durch
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \ ,$$
für $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$. Zeige, dass Γ überall differenzierbar ist und berechne die Ableitungen als Integrale.

2. Sei $\mu(\Omega) < \infty$ und seien $f, f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar.

a) Zeige, dass der Satz von Vitali den Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz impliziert.

b) Sei $\Omega = [0, 1]$. Gib ein Beispiel, in dem der Satz von Vitali anwendbar ist, jedoch keine dominierende Funktion $g \in L^1([0, 1])$ existiert.
Hinweis: Betrachte $f_k = \chi_{[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n}[}$

3. **(Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung)** Seien $1 \leq p_1, \ldots, p_k \leq \infty$ so gegeben, dass $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \leq 1$ ist. Zeige: Für $f_i \in L^{p_i}(\Omega, \mu)$ ist $\prod_{i=1}^k f_i \in L^r(\Omega, \mu)$ und
$$\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_{L^r} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}} .$$

4. Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeige: Aus $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^p(\Omega, \mu)$ folgt
$$\int_\Omega f_n \, g \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega f \, g \, d\mu$$
für alle $g \in L^q(\Omega)$.