Serie 11

1. Seien (X, μ) und (Y, ν) zwei Massräume. Nehme an, dass die Funktionen $g : X \to \mathbb{R}$ und $h : Y \to \mathbb{R}$ μ-messbar bzw. ν-messbar sind. Betrachte nun die Funktion

$$f \,:\, X \times Y \,\to\, \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f(x,y) \;:=\; g(x)\,h(y)\;.$$

Zeige, dass f $(\mu \times \nu)$-messbar ist und überprüfe, dass

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) \;=\; \int_X g\, d\mu \int_Y h\, d\nu\;.$$

2. Sei $0 < a < b$. Betrachte die Funktion x^y auf $\{0 \le x \le 1\} \times \{a \le y \le b\}$. Wende Fubini's Theorem auf das Integral

$$\int_{[0,1]\times[a,b]} x^y dx dy$$

an, um zu zeigen, dass

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln\left[\frac{1+b}{1+a}\right].$$

3. Betrachte $X = \mathbb{R}^k$, $Y = \mathbb{R}^l$ mit den Massen $\mu = \mathcal{L}^k$ bzw. $\nu = \mathcal{L}^l$, also den k- und l-dimensionalen Lebesgue Massen.

a) Zeige, dass das Produktmass $\mu \times \nu$ auf $X \times Y = \mathbb{R}^{k+l}$ folgende Eigenschaft erfüllt:

$$(\mu\times\nu)(S) = \inf\{(\mu\times\nu)(G) : G \subset \mathbb{R}^{k+l} \text{ ist offen }, S \subset G\}.$$

b) Zeige, dass $\mu \times \nu$ dem $(k + l)$-dimensionalen Lebesgue Mass $\mathcal{L}^{k+l}$ auf $\mathbb{R}^{k+l}$ entspricht.

4. a) Ein $f \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} L^p(\Omega,\mu)$ mit $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \|f\|_{L^p} < \infty$ liegt auch in $L^\infty(\Omega,\mu)$.

Hinweis: Verwende die Tchebychevsche Ungleichung.

b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$ ist, so gilt für ein f wie in **a)**, dass $\|f\|_{L^\infty} = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$.

c) Finde ein $f \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} L^p(\Omega,\mu)$ mit $f \notin L^\infty(\Omega,\mu)$, d.h. die Aussage in **a)** ist falsch ohne die Voraussetzung $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \|f\|_{L^p} < \infty$.