Dr. Francesca da Lio

Serie 12

1. Seien $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R})$, für p und q in $(1,\infty)$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Zeige, dass die Faltung $f * g$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Zeige weiter, dass $f * g$ im Unendlichen gegen 0 geht, d.h. dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\sup_{|x|>\delta} \big|(f * g)(x)\big| \ < \ \epsilon\,.$$

Hinweis: Approximiere f und g mit Funktionen in C_0^0.

2. Sei $f \in L^p(\mathbb{R},\lambda)$, wobei λ das Lebesgue Mass bezeichnet. Zeige folgende Gleichung mit Hilfe von Fubini's Theorem:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = p\int_0^\infty y^{p-1}\lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq y\})dy.$$

Hinweis: $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p y^{p-1} dy$.

Bemerkung: Vergleiche mit Serie 9, Aufgabe 1. Im Gegensatz zu damals können wir nun Fubini direkt anwenden.

3. Definiere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2}, & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist diese Funktion integrierbar bezüglich des Lebesguemasses?

Bitte wenden!

4. Satz von Marcinkiewicz

a) Sei $F \subset [0,1]$ eine abgeschlossene Menge und $\delta_F(z) = \inf\{|y-z|; y \in F\}$. Zeige mit Fubini, dass

$$\int_0^1 \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\, dz < \infty$$

für alle $\lambda > 0$ und fast jedes $x \in F$.

Hinweis: Zeige vorbereitend, dass $\delta_F(x) = 0$ äquivalent ist zu $x \in F$, falls F abgeschlossen ist.

b) Seien $F \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $f \geq 0$ integrierbar auf dem Komplement von F. Zeige: Für jedes $\lambda > 0$ ist die Funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_F(z)^\lambda}{|x-z|^{1+\lambda}}\, f(z)\, dz$$

integrierbar auf F.