Serie 13

1. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue Mass $\mathcal{L}^n$ und betrachten eine messbare Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$. Sei $B_r(x)$ der Ball mit Radius r und Mittelpunkt x. Zeige, dass für $\mathcal{L}^n$-fast alle $x \in E$ gilt:

$$lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n\left(E \cap B_r(x)\right)}{\mathcal{L}^n\left(B_r(x)\right)} = 1.$$

2. Sei μ ein endliches Borel Mass auf $[1, \infty)$ mit den Eigenschaften

(i) $\mu \ll \lambda$ mit stetiger Radon-Nikodým Ableitung $d\mu/d\lambda = f$.

(ii) $\mu(B) = \alpha^2\,\mu(\alpha B)$ für jedes $\alpha \geq 1$ und jede Borel Menge $B \subset [1, \infty)$.

Zeige, dass eine nichtnegative Konstante M existiert, sodass

$$f := \frac{M}{x^3} \qquad \forall\ x \geq 1\ .$$

3. Sei $g(x) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeige, dass $u = f * g$ die Laplace-Gleichung

$$-\Delta u = f$$

löst für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

4. a) Ist die zu $f = \chi_{[0,1]}$ gehörige Hardy-Littlewood Maximalfunktion f^* integrabel?

b) Finde das kleinste C mit $\mathcal{L}_1(\{f^* > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha}$ für alle $\alpha > 0$, wobei $f = \chi_{[0,1]}$.

5. a) Zeige: Für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $f^* \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\|f^*\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

b) Zeige $(f+g)^* \leq f^* + g^*$ für alle $0 \leq f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

c) Finde f und g mit $(f+g)^*(x) < f^*(x)+g^*(x)$ auf einer Menge positiven Masses.