Serie 1

1. a) Sei A eine fixe Teilmenge von X. Bestimme die von $\{A\}$ erzeugte σ-Algebra von Teilmengen von X.

b) Sei X überabzählbar. Sei

$$\mathcal{S} = \{E \subset X : E \text{ oder } E^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{S}$ die von den einpunktigen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra ist.

2. Sei (X, μ) ein Massraum und E eine messbare Teilmenge von X. Zeige, dass für jede Menge $A \subset X$ folgende Gleichung gilt:

$$\mu(E \cap A) + \mu(E \cup A) = \mu(E) + \mu(A).$$

3. Sei μ ein Mass auf der Menge X, und sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Teilmengen von X, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Betrachte die Menge

$$E = \{x \in X : x \text{ liegt in } A_n \text{ für unendlich viele } n\}.$$

Zeige, dass $\mu(E) = 0$.

4. Sei $A_1 \supset A_2 ... \supset A_k \supset A_{k+1} ...$ ein Folge von messbaren Teilmengen des Massraumes (X, μ). Falls $\mu(A_1) < \infty$ wissen wir[1], dass

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\cap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Zeige mit Hilfe eines Gegenbeispieles, dass diese Relation nicht mehr gilt, wenn die Annahme $\mu(A_1) < \infty$ weggelassen wird.

[1] siehe Evans-Gariepy Seite 2, Theorem 1.(iv)

Bitte wenden!

5. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Betrachte die Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$, welche wie folgt definiert ist:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ eine endliche Teilmenge von } \mathbb{N} \text{ ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

Zeige, dass μ kein Mass auf $\mathbb{N}$ ist.