Serie 2

1. Zeige, dass die Borel Mengen von $\mathbb{R}^n$ genau die Elemente jener σ-Algebra sind, welche von den kompakten Mengen erzeugt wird.

2. Sei λ das Lebesgue Mass auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass

a) falls eine Menge $E \subset [0,1]^n$ die Eigenschaft $\lambda(E) = 1$ besitzt, E dicht in $[0,1]^n$ liegt.

b) falls $E \subset \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft $\lambda(E) = 0$ besitzt, das Innere von E leer ist.

3. Sei λ das Lebesgue Mass auf $\mathbb{R}$. Sei $E \subset [0,1]$ eine Lebesgue messbare Menge set mit positivem Lebesgue Mass, also $\lambda(E) > 0$. Zeige, dass für jedes δ, $0 \leq \delta \leq \lambda(E)$, eine messbare Teilmenge von E existiert, sodass diese Teilmenge exakt das Mass δ hat.

Hinweis: Betrachte die Funktion, welche jedem $t \in [0,1]$ das Mass von $[0,t] \cap E$ zuordnet. Ist diese Funktion stetig?

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lipschitz Funktion mit Lipschitz Konstante K. Zeige, dass falls eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue Mass 0 hat, $f(E)$ ebenfalls eine Lebesgue Nullmenge ist.

Hinweis: Untersuche, wie sich f auf dem Intervall J verhält.