Serie 3

1. Beweise, dass das Mengensystem der Elementarfiguren

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle}\}$$

eine Algebra ist. [1]

Bemerkung: Ein Intervall I in $\mathbb{R}^n$ ist von der Form $I = I_1 \times \ldots \times I_n$, $1 \leq k \leq n$, wobei I_k Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.

2. Zeige: Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lebesgue-Nullmenge, wenn eine Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(I_k) < \infty$.
2. Jeder Punkt von Ω liegt in unendlich vielen Intervallen I_k.

Bemerkung: Für ein Intervall $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ in $\mathbb{R}^n$ ist das Volumen durch $\mathrm{Vol}(I) = \Pi_{k=1}^{n} \mathrm{Vol}(I_k)$ gegeben, wobei $\mathrm{Vol}(I_k)$ die Länge des eindimensionalen Intervalles ist.

3. Sei X eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{B} = \{\, E \subseteq X \ : \ E \text{ abzählbar oder } E^c = X \setminus E \text{ abzählbar} \,\} \ .$$

eine σ-Algebra (siehe Serie 1, 1.b). Zeige, dass $\mu \colon \mathcal{B} \to [0,1]$ mit

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{falls } E \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Prämass auf $\mathcal{B}$ ist.

[1] Vgl. Bemerkung 1.3.1 im Skript *Analysis 3*, Struwe

Bitte wenden!

4. a) Das Zählmass $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ist definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} \#A & \text{falls A endlich ist} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige: μ ist ein Mass auf $\mathbb{R}^n$.

b) Sei $x \in X$. Das Dirac-Mass $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ist definiert durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

Zeige: δ_x ist ein Mass auf $\mathbb{R}^n$.

5. a) Finde ein Beispiel für eine Folge $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ von paarweise disjunkten Teilmengen eines Massraumes (X, μ) sodass

$$\mu\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

b) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Finde ein Beispiel einer kompakten Menge $K_\epsilon \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ mit leerem Inneren, sodass das Lebesguemass mindestens $1 - \epsilon$ beträgt.