Serie 4

1. Zeige, dass das Lebesgue-Mass invariant unter Translationen und Rotationen, also unter allen Bewegungen der Form

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(x) = x_0 + Rx$$

für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R \in O(n)$, ist.

2. Zeige: Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Borel-Menge und eine Lebesgue-Nullmenge.

3. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Cantor Menge C überabzählbar ist. Erinnerung: Jedes $x \in [0,1]$ kann zur Basis 3 entwickelt werden, d.h. $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x)\frac{1}{3^i}$ für $d_i(x) \in \{0,1,2\}$. Die Cantor Menge C ist dann durch jene $x \in [0,1]$ definiert, welche keine Koeffizienten 1 zur Basis 3 haben, also

$$C := \{x \in [0,1] | d_i(x) \in \{0,2\} \forall i\}.$$

Die Cantor-Lebesgue Funktion F ist nun wie folgt definiert:

$$F : C \to [0,1], \qquad F\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{2^{i+1}}$$

a) Zeige dass $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$.
b) Zeige dass F wohldefiniert und stetig auf C ist.
c) Zeige dass F surjektiv ist.
d) Schliesse daraus, dass C überabzählbar ist.

4. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq s < t \leq \infty$. Zeige dass:

(i) Falls $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, dann $\mathcal{H}^t(A) = 0$.
(ii) Falls $\mathcal{H}^t(A) > 0$, dann $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Bemerkung: Dies impliziert, dass es einen eindeutigen Wert $d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für $s > d$ und $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ für $s < d$. Dieser Wert d wird auch die Hausdorff Dimension von A genannt.