Serie 5

1. Sei $\gamma : [a, b] \to X$ eine stetige injektive Kurve in einem metrischen Raum (X, d). Wir definieren die Bogenlänge von γ als

$$L(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)),$$

wobei das Supremum über alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $a \leq t_0 \leq \ldots \leq t_N \leq b$ genommen wird. Zeige: $\mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\gamma)) = \frac{1}{2}L(\gamma)$.

2. a) Sei I das Intervall $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$. Zeige, dass $\mathcal{H}^1(I) = \frac{1}{2}$.

b) Verfolge induktiv diese Konstruktion: Starte mit einem geschlossenen gleichseitigen Dreick E_0 mit Seitenlänge 1. Sei E_1 die Menge, welche aus drei geschlossenen gleichseitigen Dreiecken T_1^l $(l = 1, 2, 3)$ mit Seitenlänge $\frac{1}{3}$ besteht, wobei die Dreiecke im Inneren von E_0 liegen und in den Ecken von E_0 liegen. Man schneidet also ein Hexagon mit Seitenlänge $\frac{1}{3}$ aus der Mitte von E_0 heraus.
Bei jeden Schritt der Konstruktion starten wir mit E_{j-1}, was aus 3^{j-1} geschlossenen gleichseitigen Dreiecken T_{j-1}^l (für $l = 1, ..., 3^{j-1}$) besteht. Für jedes T_{j-1}^l wird dann wie oben verfahren : Wir nehmen die drei geschlossenen gleichseitigen Dreiecke aus den Ecken von T_{j-1}^l, wobei die Seitenlängen der neuen Dreiecke gleich $\frac{1}{3}$ der Seitenlänge von T_{j-1}^l betragen. Insgesamt erhalten wir also 3^j Dreiecke T_j^l und die Vereinigung bezeichnen wir mit E_j.
Sei $E = \cap_{j=1}^{\infty} E_j$.
Zeige, dass die Hausdorff Dimension von E gleich 1 ist.
Hinweis: Für jedes positive δ in einer Folge, welche gegen 0 konvergiert, betrachten wir eine geeignete Überlagerung mit Hilfe welcher wir zeigen können, dass $\mathcal{H}^1(E)$ von oben durch eine positive Zahl beschränkt ist. Um eine positive untere Schranke zu erhalten, betrachte die Projektion von E auf eine der Seiten von E_0.

3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Konstante L. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq s < +\infty$. Zeige, dass

$$H^s(f(A)) \leq L^s H^s(A).$$

Bitte wenden!

4. Sei μ ein Mass auf $\mathbb{R}^n$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Teilmenge. Sei $f : X \to \mathbb{R}$. f heisst μ-messbar, falls für alle offenen Teilmengen U von $\mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}(U)$ μ-messbar ist. Ausserdem müssen die Mengen $f^{-1}(\{-\infty\})$ und $f^{-1}(\{\infty\})$ μ-messbar sein.

Sei nun A eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeige dass f genau dann μ-messbar ist, wenn $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ für alle $a \in A$ μ-messbar ist.

5. Sei E die Menge aller Zahlen in $[0, 1]$ welche keine 7 in der Dezimaldarstellung haben.

Bemerke, dass es auch zwei verschiedene Darstellungen geben kann. Wir machen hier die Konvention, nur jene Darstllungen zu betrachten, welche von keiner Nachkommastelle an identisch null sind. Wir schreiben also $\frac{27}{100}$ als $0,269999....$ und nicht $0,27$.

Beweise, dass E Lebesgue-messbar ist und berechne das Lebesgue-Mass.