Serie 6

1. Beweise die folgenden Aussagen.

a) $\mathcal{L}^n$, Λ_F sind Radonmasse auf $\mathbb{R}^n$, beziehungsweise $\mathbb{R}$.

b) $\mathcal{H}^s$ für $s < n$ ist kein Radonmass, für $s \geq n$ aber schon ein Radonmass.

c) Falls μ ein Radonmass ist, $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, so ist auch $\mu|A$ mit

$$(\mu|A)(B) := \mu(A \cap B), B \subset \mathbb{R}^n$$

ein Radonmass.

2. Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

i) $f^{-1}(U)$ ist μ-messbar für jedes offene $U \subset \mathbb{R}$

ii) $f^{-1}(B)$ ist μ-messbar für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$.

iii) $f^{-1}(]-\infty, a[)$ ist μ-messbar für jedes $a \in \mathbb{R}$.

3. Sei (X, μ, Σ) ein Massraum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen auf X. Zeige: Die Mengen $\{x; f(x) = g(x)\}$ und $\{x; f(x) < g(x)\}$ sind messbar.

4. Eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst Borel-messbar, falls $g^{-1}(U)$ eine Borelmenge ist für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$.
Sei nun (X, μ, Σ) ein Massraum, und seien $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei f μ-messbar und g Borel-messbar ist. Zeige, dass $g \circ f$ μ-messbar ist.

5. Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ μ-fast überall stetig (d. h. die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist eine μ-Nullmenge). Zeige, dass f μ-messbar ist.

6. Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass jede monotone Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ μ-messbar ist.