Serie 7

1. Es seien $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbare Funktionen ($k \in \mathbb{N}$). Es gelte

$$\mathcal{L}^n(\{x\,;\,|f_k(x) - f_{k+1}(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige: Der Limes $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert fast überall.

2. Es sei f eine endliche, μ-messbare Funktion, und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-messbarer Funktionen mit folgender Eigenschaft: Jede Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ enthält eine weitere Teilfolge, die im Mass μ gegen f konvergiert.

a) Zeige, dass dann die gesamte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Mass μ gegen f konvergiert.

b) Zeige, dass die analoge Aussage nicht gilt, wenn man Masskonvergenz durch punktweise Konvergenz μ-fast überall ersetzt.

3. Gegenbeispiel zu $\delta = 0$ im Satz von Egoroff: Finde ein Beispiel einer Folge von $\mathcal{L}^1$-messbaren Funktionen $f_k : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, aber für jedes kompakte $F \subset [0,1]$ mit $\mathcal{L}^1(F) = \mathcal{L}^1([0,1])$ ist die Konvergenz auf F nicht gleichmässig.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ .$$

a) Zeige, dass f stetig ist.
Hinweis: Benutze den Satz von Lusin, um zu zeigen, dass f stetig ist an der Stelle $x = 0$.

b) Zeige, dass

$$f(x) = x \cdot f(1)\ .$$

5. Sei μ ein Radon Mass auf $\mathbb{R}^n$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Teilmenge. Weiters sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die μ-fast überall 0 ist. Zeige, dass f integrierbar ist mit $\int_\Omega f = 0$.