Serie 8

1. Beweise den folgenden Satz: Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion und

$$|\int_\Omega f \; d\mu| = \int_\Omega |f| \; d\mu \; .$$

Dann ist entweder $f \geq 0$ oder $f \leq 0$ fast überall auf Ω.

2. Sei $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige, dass dann $x^k f$ integrierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 x^k f(x) \; dx = 0 \; .$$

3. Finde ein Beispiel einer stetigen, beschränkten Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit asymptotischem Verhalten $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, für die

$$\int_0^\infty |f(x)|^p dx = \infty \; ,$$

für alle $p > 0$.

4. a) Sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf einer messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ fast überall absolut konvergiert, wenn

$$\sum_{k=1}^\infty \int_\Omega |f_k| dx < \infty \; .$$

b) Sei $\{r_k\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$; $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, für die $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergent ist. Zeige, dass dann $\sum_{k=1}^\infty a_k |x - r_k|^{-1/2}$ absolut konvergent ist für fast alle $x \in [0,1]$.

5. Finde ein Beispiel einer nicht Lebesgue-integrierbaren Funktion, deren uneigentliches Riemann-Integral existiert und endlich ist.