Dr. Francesca da Lio

Serie 9

Achtung: μ-integrierbar entspricht μ-*summable*! (und uneigentlich μ-integrierbar entspricht μ-*integrable*)

1. Sei λ das Lebesgue Mass auf $\mathbb{R}$ und f eine nicht negative, integrierbare Funktion auf $(\mathbb{R}, \lambda)$. Zeige, dass die folgende Gleichung für das Lebesgue Integral gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > s\}) ds.$$

Hinweis: Zeige die Gleichung zuerst für den Fall, wenn f eine einfache Funktion ist. In diesem Fall wird eine Skizze von f und der Funktion $s \to \lambda(\{f > s\})$ weiterhelfen. Interpretiere beide Seiten im Hinblick auf die Definition des Lebesgue Masses.

2. Sei μ ein Radon Mass auf $\mathbb{R}^n$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Teilmenge. Seien $f, f_1, f_2, ..., f_n, ...$ nicht negative integrierbare Funktionen sodass $f_n \to f$ μ-fast immer und $\lim_n \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$. Sei $E \subset \Omega$ messbar. Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Hinweis: Verwende Fatou's Lemma für E sowie für E^c.

3. Sei f_n, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Zeige, dass

(i) $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0, 1]$ für alle $n \geq 1$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$.

Bitte wenden!

4. Beweise folgendes Resultat.

Sei μ ein Radon Mass auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\{f_n\}$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sodass $f_n \to f$ im Mass für ein μ-messbares f. Nehme an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine integrierbare Funktion g_n auf $\mathbb{R}^n$ existiert, sodass $|f_n(x)| \leq |g_n(x)|$ μ-fast immer und nehme ausserdem an, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_n - g| d\mu = 0$$

für eine integrierbare Funktion g. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_n - f| d\mu = 0.$$

Hinweis: Zwei Möglichkeiten:

- In der Vorlesung wurde ein ähnliches Resultat (als Konsequenz von Vitali's Theorem) bewiesen, allerdings mit der zusätzlichen Annahme, dass wir auf einer Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(\Omega) < \infty$ operieren. Verwende dieses Resultat.
- Verwende Aufgabe 1

5. **Alternativer Beweis zu Young's Ungleichung**. Young's Ungleichung besagt, dass

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

für $1 < p, q < \infty$ sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b > 0$. Zeige die Ungleichung, indem auf beiden Seiten der Logarithmus genommen wird.

6. Sei μ ein Radon Mass auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Für $A \subset \Omega$ messbar, definiere:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Zeige, dass für $f \geq 0$ μ-fast immer ν ein Radon Mass auf $\mathbb{R}^n$ ist.