Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 2

1. Seien $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann ist die Ableitung der in einer Umgebung von x_0 durch $f(x, \varphi(x)) = 0$ definierten Funktion φ gegeben durch

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

i) ✗ Es muss heissen $\varphi'(x_0) = -\frac{f_y(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)}$.

ii) ✓ Dies folgt direkt aus der verallgemeinerten Kettenregel für $\frac{d}{dt} f(x(t))$.

iii) ✗ Ohne die Funktion φ zu kennen, ist es unmöglich, deren Ableitung zu berechnen.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Aussage ist korrekt und folgt aus der Kettenregel. Der Satz über implizite Funktionen besagt ja gerade, dass unter den entsprechenden Voraussetzungen die Ableitung existiert und den angegebenen Wert besitzt, auch ohne φ zu kennen.

2. Sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig-differenzierbar. Man betrachte die Substitution von f in Polarkoordinaten, d.h. $f(x, y) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = \tilde{f}(r, \varphi)$, wobei $x(r, \varphi) = r\cos(\varphi)$ und $y(r, \varphi) = r\sin(\varphi)$. Wie lautet dann $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ im ersten Quadranten in Polarkoordinaten?

i) ✗ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial r} \cos(\varphi) - \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\sin(\varphi)}{r}$.

ii) ✗ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial \varphi}$.

iii) ✓ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial r} \sin(\varphi) + \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\cos(\varphi)}{r}$.

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Mit Hilfe der Kettenregel hat man $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial r} \frac{\partial r(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}(r,\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}$. Da $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ (gültig im 1. und 4. Quadranten!) gilt, folgt $\frac{\partial r(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin(\varphi)}{r} = \sin(\varphi)$ und $\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos(\varphi)}{r^2} = \frac{\cos(\varphi)}{r}$.

3. Wie lautet der Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2y + y$?

i) ✗ $\nabla f(x, y) = x^2 + 2xy + 1$.

ii) ✓ $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 1 \end{pmatrix}$

iii) ✗ $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$

iv) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Der Gradient von f ist definiert als

$$\triangledown f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+1 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben ist die Funktion $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^3y^2z$. Man setze sich in den Punkt $(1,-1,1)$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

i) ✗ Man stellt in x-Richtung eine Zunahme der Funktionswerte fest.

ii) ✗ Man stellt in y-Richtung eine Abnahme der Funktionswerte fest.

iii) ✓ Man stellt in Richtung von $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

iv) ✗ Man stellt in Richtung von $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

v) ✗ Man stellt in Richtung von $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Es gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla f(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtungsableitung ist das Skalarprodukt aus der Richtung und dem Gradienten, so lassen sich alle gesuchten Steigungen $(= 3; -2; -\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{2}})$ berechnen. Für die ersten beiden Antworten sind die Richtungen jeweils die Standardvektoren e_1 resp. e_2.

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar. Welcher Ausdruck ist im allgemeinen **nicht** gleich zu den anderen?

i) ✗ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

ii) ✗ $D_{(1,0)} f(x_0, y_0)$

iii) ✓ $D_{(-1,0)}f(x_0, y_0)$

iv) ✗ $-D_{(-1,0)}f(x_0, y_0)$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die ersten beiden Ausdrücke sind nach ihrer Definition gleich. Wegen

$$D_{(-1,0)}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ist auch die vierte gleich, die dritte jedoch nicht.

6. Für $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f.$$

i) ✓ wahr

ii) ✗ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Dies ist eine Verallgemeinerung der bekannten Produktregel für Ableitungen. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla(f \cdot g)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(f \cdot g) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f \cdot g) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f \cdot g_x + g \cdot f_x \\ f \cdot g_y + g \cdot f_y \\ f \cdot g_z + g \cdot f_z \end{pmatrix} \\ &= f \cdot \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f.\end{aligned}$$

7. Da der Gradient die Richtung des maximalen Anstiegs angibt, ist er immer positiv.

i) ✗ wahr

ii) ✓ falsch

iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Das stimmt narürlich nicht. Der Gradient ist zwar wie gesagt ein Vektor, der in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Ein Vektor gibt jedoch eine Richtung an und ist weder positiv noch negativ.