Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 3

1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon g(x,y) = c \cdot f(x,y)$. Welche Aussagen sind richtig?

i) ✓ Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von f ist, dann auch von g.

ii) ✗ Falls (x_0, y_0) ein lokales Extremum von g ist, dann auch von f.

iii) ✗ Falls (x_0, y_0) ein lokales Maximum von g ist, dann auch von f.

iv) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  Falls $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ für Punkte (x,y) in der Nähe von (x_0,y_0), so gilt für diese Punkte auch $c \cdot f(x,y) \leq c \cdot f(x_0,y_0)$ $(c \geq 0)$ bzw. $c \cdot f(x,y) \geq c \cdot f(x_0,y_0)$ $(c \leq 0)$.
- **Lösung**
  Falls $c = 0$, so hat $g \equiv 0$ überall ein lokales Extremum. Dies muss jedoch nicht für f gelten.
- **Lösung**
  Falls $c < 0$, so folgt $g(x,y) \leq g(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

i) ✓ Jede globale Extremalstelle ist auch eine lokale Extremalstelle.

ii) ✗ Jede lokale Extremalstelle ist auch eine globale Extremalstelle.

iii) ✗ Jede lokale Extremalstelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist eine globale Extremalstelle.

iv) ✗ Jede Stelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist eine lokale Extremalstelle.

v) ✗ Es gibt immer nur eine globale Maximalstelle.

vi) ✗ weiss ich nicht

- **Lösung**
  Falls für alle Punkte $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ gilt, so stimmt dies insbesondere für Punkte in der Nähe von (x_0,y_0). Jede globale Extremalstelle ist also auch eine lokale. Das umgekehrte stimmt nicht. Zum Beispiel hat die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$ in den Punkten $x_0 = \pm 1$ lokale Extremalstellen, besitzt jedoch weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum.
- **Lösung**
  Die partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden an jeder lokalen Extremalstelle.

- **Lösung**
  Das Maximum kann auch an mehreren Stellen angenommen werden. Ein einfaches (eindimensionales) Beispiel ist $f(t) = \cos(t)$ mit den Maximalstellen $2k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Sei $f(x, y) : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Definitionsbereich von f ist. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

i) ✗ f hat in (x_0, y_0) ein lokales Maximum bzw. Minimum $\Rightarrow$ $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

ii) ✗ $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ hat in (x_0, y_0) einen kritischen Punkt.

iii) ✗ f hat in (x_0, y_0) ein lokales Maximum $\Rightarrow$ $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle $(x, y) \in G$ in der Nähe von (x_0, y_0).

iv) ✓ $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ hat in (x_0, y_0) ein lokales Maximum bzw. Minimum.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Die Antwort a) folgt aus dem Satz der Vorlesung, b) ist die Definition, c) auch. Aber d) ist falsch, das Gegenbeispiel wäre ein Sattelpunkt.

4. Sei $f(x, y) : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ der Definitionsbereich von f ist. Sei (x_0, y_0) ein kritischer Punkt von f, d.h. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) ✓ $f_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0)$ ist ein Sattelpunkt

ii) ✗ $f_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0)$ ist ein Sattelpunkt

iii) ✓

$$\begin{aligned}
f_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) &< 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\
&\Rightarrow \quad (x_0, y_0) \text{ ist ein lokales Minimum,} \\
\mathrm{f}_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) &< 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\
&\Rightarrow \quad (x_0, y_0) \text{ ist ein lokales Maximum.}
\end{aligned}$$

iv) ✗

$$\begin{aligned}
f_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) &< 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\
&\Rightarrow \quad (x_0, y_0) \text{ ist ein lokales Maximum,} \\
\mathrm{f}_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) &< 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\
&\Rightarrow \quad (x_0, y_0) \text{ ist ein lokales Minimum.}
\end{aligned}$$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Siehe Kriterium aus der Vorlesung.

5. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y).$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

i) ✗ $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ genau dann, wenn $x = y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

ii) ✗ $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ genau dann, wenn $x = y = k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$.

iii) ✗ $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y = k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}:\ \xi$ ist lokaler Minimierer von f.

iv) ✓ $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}:\ \xi$ ist keine Extremstelle von f.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Der Gradient ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \\ \sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\nabla f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x, y \in \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Die ersten beiden Antworten sind also falsch.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}.$$

Für Punkt (x, y) mit $x = y = k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$ gilt $H_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und folglich $D = -f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2 = -1 < 0$, $f_{xx} = -1 < 0$. Dies sind lokale Maxima.

Für die Punkte mit $x = y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ gilt jedoch $D = 1 > 0$. Es handelt sich daher um Sattelpunkte und keine lokalen Extrema.