Analysis D-BAUG
Dr. Cornelia Busch FS 2016

MC-Serie 4

1. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ soll bezüglich einer Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ maximiert werden. In einem Extremum...

i) ✗ muss ∇f senkrecht auf ∇g stehen.

ii) ✓ muss ∇f ein skalares Vielfaches von ∇g sein.

iii) ✗ muss $\nabla f + \nabla g = 0$ gelten.

iv) ✗ muss $\nabla f \cdot \nabla g = 0$ gelten.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Siehe die Herleitung zum Lagrange-Verfahren aus der Vorlesung.

2. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

i) ✓ $\max\{xy \mid x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 1\} = \dfrac{1}{4}$.

ii) ✗ $\min\{xy \mid x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 1\} = \dfrac{1}{4}$.

iii) ✗ $\max\{xy \mid x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 1\} = -\dfrac{1}{4}$.

iv) ✗ $\min\{xy \mid x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 1\} = -\dfrac{1}{4}$.

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Wir bestimmen die Extremalstellen von $f(x, y) = xy$ under der Nebenbedingung $g(x, y) = x + y = 1$. Lagrange liefert

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $x = y = \frac{1}{2}$ die einzige Extremalstelle mit $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Um zu sehen, dass es sich hierbei um das Maximum handelt, bemerke, dass die Niveaulinien $xy = c > 0$ Hyperbeln mit Scheitel auf der Geraden $x = y$ sind. Diese schneiden die Gerade $x + y = 1$ nur für $c \leq \frac{1}{4}$.

3. Sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig. Man betrachte die Substitution von f in Polarkoordinaten, d.h. $f(x, y) = f(x(r, \phi), y(r, \phi)) = \tilde{f}(r, \phi)$ wobei $x(r, \phi) = r\cos(\phi)$ und $y(r, \phi) = r\sin(\phi)$. Dann ist $|\nabla f(x, y)|^2$ gegeben durch

i) ✗ $\tilde{f}_r^2 + \tilde{f}_\phi^2$

ii) ✓ $\tilde{f}_r^2 + \frac{\tilde{f}_\phi^2}{r^2}$

iii) ✗ $\begin{pmatrix} \tilde{f}_r^2 \\ \tilde{f}_\phi^2 \end{pmatrix}$

iv) ✗ $\begin{pmatrix} \tilde{f}_r^2 \\ \frac{\tilde{f}_\phi^2}{r^2} \end{pmatrix}$

v) ✗ weiss ich nicht

Lösung
Für $x > 0$ gilt $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ und folglich

$$\frac{\partial r(x,y)}{\partial x} = \cos\phi, \qquad \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r},$$
$$\frac{\partial r(x,y)}{\partial y} = \sin\phi, \qquad \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r}.$$

Mit der Kettenregel folgt also

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= (f_x)^2 + (f_y)^2 \\ &= \left(\tilde{f}_r \cos\phi - \tilde{f}_\phi \frac{\sin\phi}{r}\right)^2 + \left(\tilde{f}_r \sin\phi + \tilde{f}_\phi \frac{\cos\phi}{r}\right)^2 \\ &= \tilde{f}_r^2 + \frac{\tilde{f}_\phi^2}{r^2} \ . \end{aligned}$$

Der Term $|\nabla f(x,y)|^2$ entspricht oft einer Energiedichte und ist deshalb in vielen Anwendungen von Bedeutung.