

MC-Serie 5

1. Welches der folgenden Integrale ist NICHT gleich den anderen?

- i) ✗ $\int_0^1 \int_0^x x \, dy \, dx$
- ii) ✓ $\int_0^1 \int_0^y x \, dx \, dy$
- iii) ✗ $\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy$
- iv) ✗ $\int_0^1 \int_y^1 x \, dx \, dy$
- v) ✗ weiss ich nicht

Lösung

In i) und iv) ist der Integrationsbereich gegeben durch dieselbe Bedingung $0 \leq y \leq x \leq 1$. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein. Dasselbe gilt für das Integral iii), welches aus i) durch Vertauschung der Variablen x und y entsteht. Als einzig mögliche korrekte Antwort verbleibt daher ii). Wegen $\int_0^1 \int_0^y x \, dx \, dy = \int_0^1 (x^2/2 |_{x=0}^{x=y}) \, dy = \int_0^1 y^2/2 \, dy = y^3/6 |_{y=0}^{y=1} = 1/6$ und $\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy = \int_0^1 (yx |_{x=0}^{x=y}) \, dy = \int_0^1 y^2 \, dy = y^3/3 |_{y=0}^{y=1} = 1/3$ ist ii) tatsächlich von den anderen verschieden.

2. Im Doppelintegral $\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$ müssen die Grenzen a und b entweder Konstanten oder Funktionen in x sein.

- i) ✗ wahr
- ii) ✓ falsch
- iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die Integrationsgrenzen a und b müssen entweder Konstanten oder Funktionen in y sein, da diese zur Variablen x gehören.

3. Im Doppelintegral $\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$ müssen die Grenzen c und d entweder Konstanten oder Funktionen in y sein.

- i) ✗ wahr
- ii) ✓ falsch
- iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Die Integrationsgrenzen c und d müssen Konstanten sein.

4. Durch

$$\int_0^2 \int_1^y f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^2 \int_0^2 f(x, y) \, dy \, dx$$

ist ein korrekter Wechsel der Integrationsreihenfolge gegeben.

- i) ✗ wahr
- ii) ✓ falsch
- iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Falls die Integrationsgrenzen Konstanten sind, dürfen wir die Integrationsreihenfolge auf diese Weise wechseln, ansonsten jedoch nicht. Hier macht das Integral auf der rechten Seite gar keinen Sinn, da zuerst nach y integriert wird, jedoch bei der späteren Integration nach x die Variable y wieder als Grenze auftaucht.

5. Prüfungsaufgabe 4a, Sommer 2014. Durch

$$\int_1^3 \int_{-y}^0 f(x, y) dx dy = \int_1^3 \int_{-x}^3 f(x, y) dy dx$$

ist ein korrekter Wechsel der Integrationsreihenfolge gegeben.

- i) ✗ wahr
- ii) ✓ falsch
- iii) ✗ weiss ich nicht

Lösung

Es handelt sich um zwei verschiedene Integrationsgebiete:

